大多喜の高専物理

微積分の考えを取り入れた説明を心がけています。

中学生程度の数学を知っていれば、理解できるようにしたいと思っています。

授業の前に

＊　シラバスの説明

＊　その他

・　考えを出しやすい環境づくり

「それはそう」「それはちがう」「それよりこれ」

それはの**それ**を出すのが、桁違いに**難しい！**

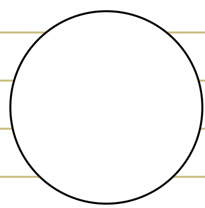
・　試験監督不要の環境づくり

人はだませても、**自然はだませない！**

平均値の求め方

平均値を求めるとき、正確な値が求められる場合と求められない場合があります。

入学試験の平均点は、どんなに受験者が多くとも、全員の点数が分かるので、正確に求められます。



しかし、左の円の直径を何万回測定しても、すべての直径を測定できないので、平均値は正確には求められません。（たとえ無限回測定しても、すべてを測定しない限り、求められません。）

ここでは、数学（確率統計論）で、「母平均の区間推定」と言われる方法を紹介します。直径をN回測定し、測定値がR_1、R_2、R_3、・・・、R_Nだったとします。区間推定の手順を次に示します。

1．区間の中心値を求めます。

$$\overline{R} = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_N}{N}$$

2．区間の幅を求めます。

$$\Delta R = k\sqrt{\frac{(R_1 - \overline{R})^2 + (R_2 - \overline{R})^2 + (R_3 - \overline{R})^2 + \cdots + (R_N - \overline{R})^2}{N(N-1)}}$$

注） k の値は t 分布表の N-1 行目の値から選びます。通常、実験では、0.50 列の値を用い、その値を用いて得られた幅を公差と言います。

3．区間を表記します。

$$R = \overline{R} \pm \Delta R \ [単位]$$

＊．表記例と意味

$$R = (1.234 \pm 0.005) \times 10^{-2} \ [m]$$

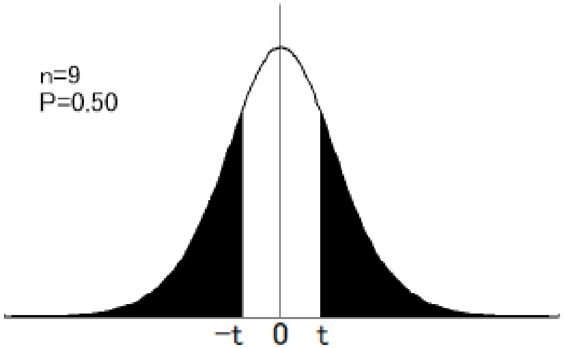
直径の平均値は 1.229×10^{-2}[m]と 1.239×10^{-2}[m]の間にある可能性があり、その確率は、区間の幅を求めるときに用いた k の値が 0.50 列の値ならば 50%、0.10 列の値ならば 90%、0.01 列の値ならば 99%です。

t 分布表

自由度n、確率pのときのtの値を表にしました。

以下のエクセルの関数で、tの値が得られます。
TINV(確率pの値，自由度nの値)

[余談]
nの値を変えると山の形が変わります。ガンマー関数が式に出てきて、1,2年生には少し難しいですが、挑戦するのも良いと思います。
（nを小さくすると、山の高さに比べ、裾野が広くなります。）



tの値		確率P　（黒塗り部分の面積／山全体の面積）							
		0.500	0.250	0.100	0.050	0.025	0.020	0.010	0.005
自由度n（測定回数から1を引いた数）	1	1.000	2.414	6.314	12.706	25.452	31.821	63.656	127.321
	2	0.816	1.604	2.920	4.303	6.205	6.965	9.925	14.089
	3	0.765	1.423	2.353	3.182	4.177	4.541	5.841	7.453
	4	0.741	1.344	2.132	2.776	3.495	3.747	4.604	5.598
	5	0.727	1.301	2.015	2.571	3.163	3.365	4.032	4.773
	6	0.718	1.273	1.943	2.447	2.969	3.143	3.707	4.317
	7	0.711	1.254	1.895	2.365	2.841	2.998	3.499	4.029
	8	0.706	1.240	1.860	2.306	2.752	2.896	3.355	3.833
	9	0.703	1.230	1.833	2.262	2.685	2.821	3.250	3.690
	20	0.687	1.185	1.725	2.086	2.423	2.528	2.845	3.153
	60	0.679	1.162	1.671	2.000	2.299	2.390	2.660	2.915
	120	0.677	1.156	1.658	1.980	2.270	2.358	2.617	2.860
	∞	0.674	1.150	1.645	1.960	2.241	2.326	2.576	2.807

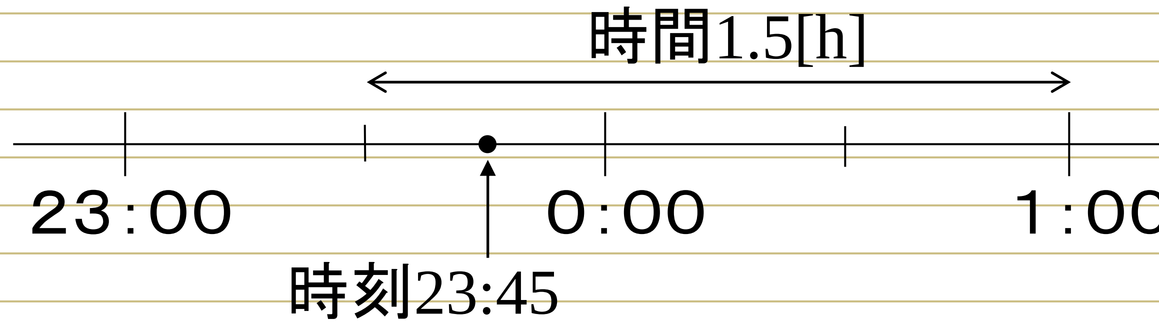
第1章　力と運動

乗り物や水など、様々な物体が運動しています。

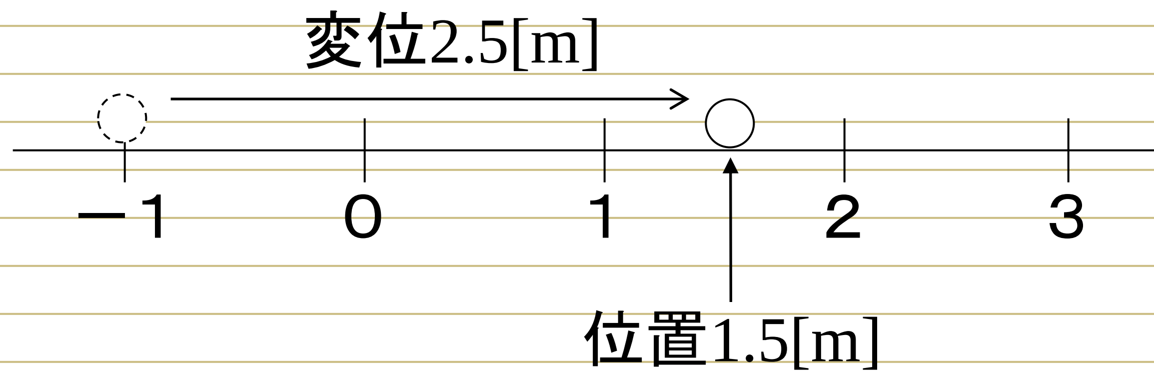
物体には、どんな力が働いているのでしょう。

用語について

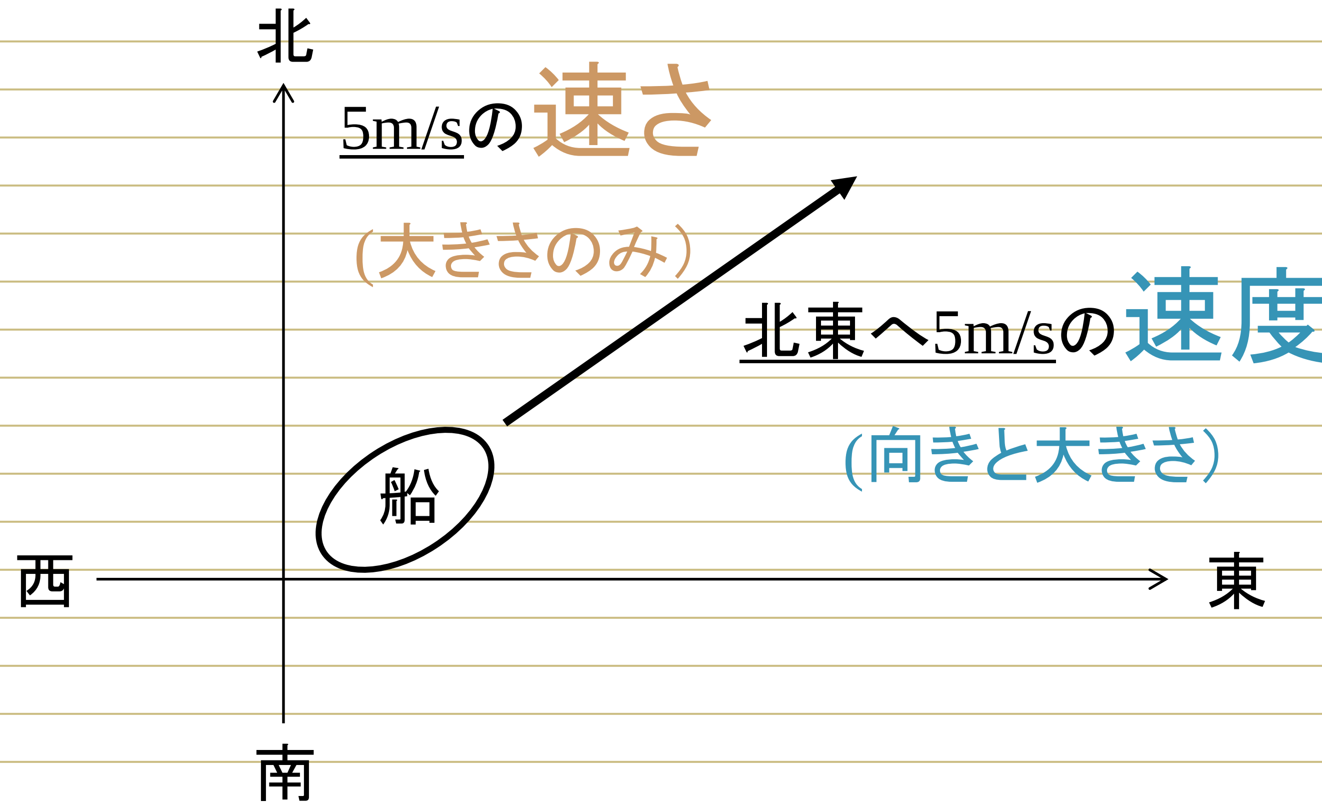
- 時刻と時間



- 位置と変位



- 速度と速さ



$$速度[\mathrm{m/s}] = \frac{変位[\mathrm{m}]}{時間[\mathrm{s}]}$$

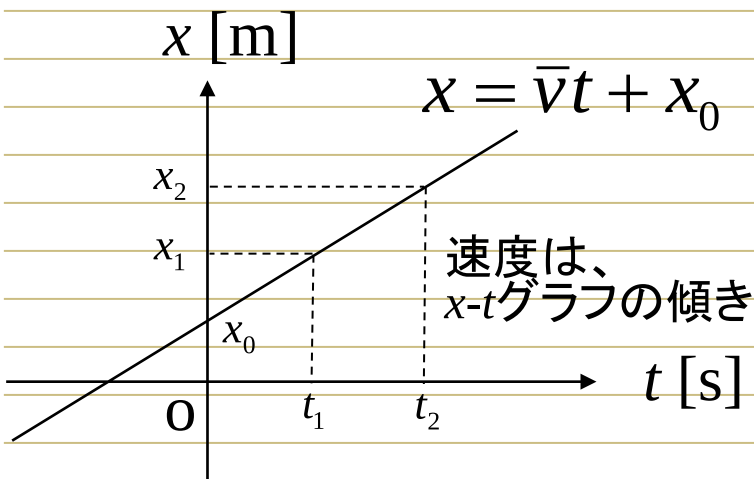
時刻[s]　$t_1 \to t_2$

位置[m]　$x_1 \to x_2$

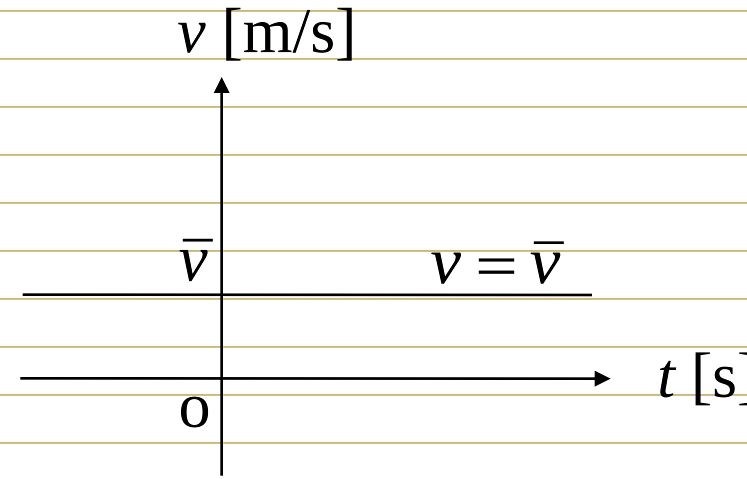
のとき、平均の速度　$\bar{v}$[m/s]は

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

等速直線運動の場合



x-*t* グラフ



v-*t* グラフ

速度[m/s] $= \dfrac{\text{変位[m]}}{\text{時間[s]}}$

・平均の速度と瞬間の速度

位置と時刻の関係が $x = \alpha t^2$ の運動を例に説明する。

時刻[s] $t_1 \to t_1 + \Delta t$

位置[m] $\alpha t_1^2 \to \alpha(t_1 + \Delta t)^2$

平均の速度 $\bar{v}$[m/s]は

$$\bar{v} = \frac{\alpha(t_1 + \Delta t)^2 - \alpha t_1^2}{(t_1 + \Delta t) - t_1}$$

公式 $c(a+b)^2 = ca^2 + 2cab + cb^2$

$$= \frac{\alpha t_1^2 + 2\alpha t_1 \Delta t + \alpha(\Delta t)^2 - \alpha t_1^2}{t_1 + \Delta t - t_1}$$

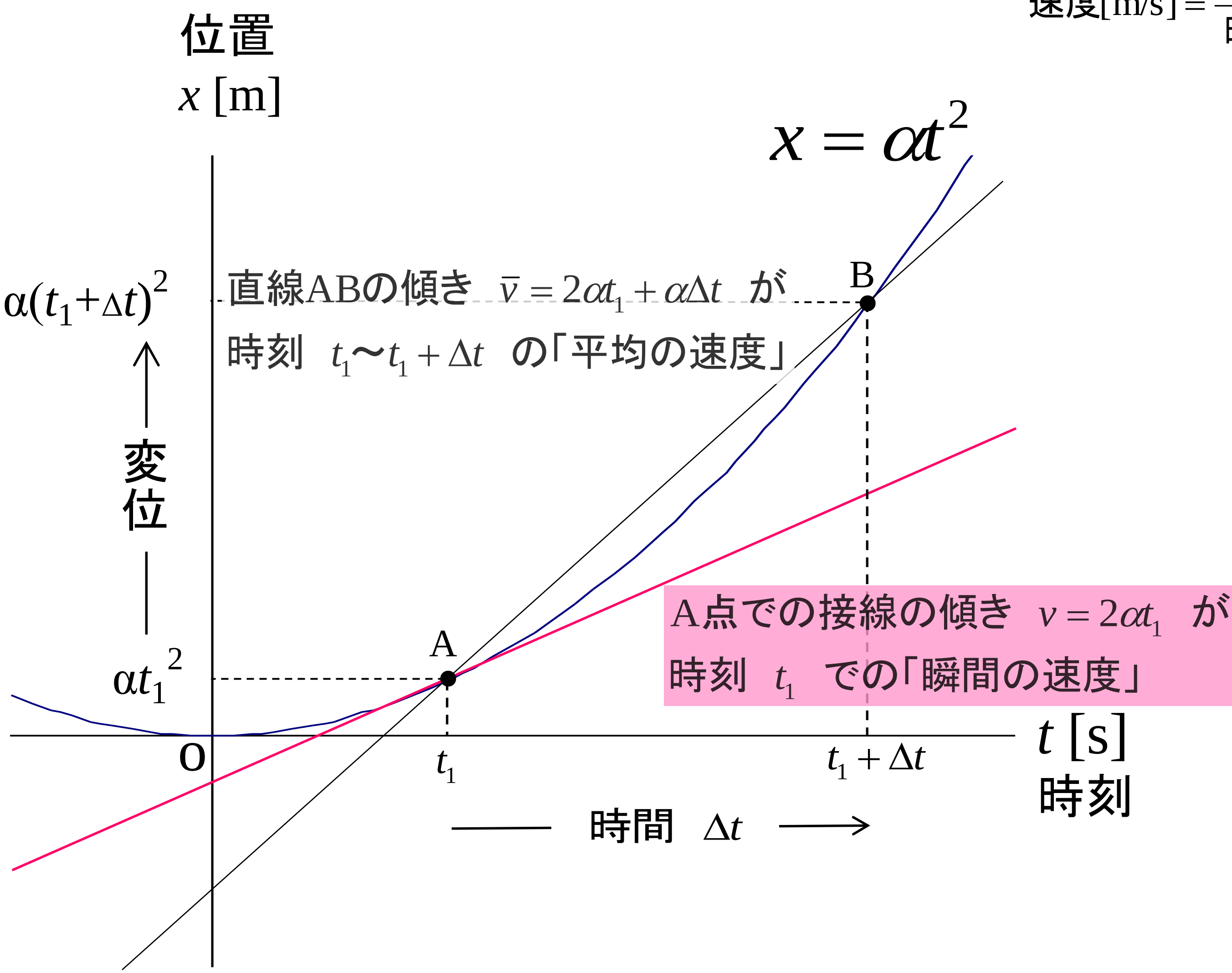
$$= \frac{2\alpha t_1 \cancel{\Delta t} + \alpha(\Delta t)^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta t}}$$

$$\therefore \bar{v} = 2\alpha t_1 + \alpha \Delta t$$

瞬間の速度 v[m/s]は、$\boxed{\text{時間}\Delta t \to 0}$ とすれば良いので、

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}(2\alpha t_1 + \alpha \Delta t) \qquad \therefore v = 2\alpha t_1$$

$$速度[\mathrm{m/s}] = \frac{変位[\mathrm{m}]}{時間[\mathrm{s}]}$$



【問】 位置 x[m]と時刻 t[s]の関係式が $x=\alpha t^2$ のとき、時刻 t_1-Δt から t_1秒までの平均の速度と瞬間の速度を求めよ。

【解】

時刻[s] $t_1 - \Delta t \longrightarrow t_1$

位置[m] $\alpha(t_1 - \Delta t)^2 \longrightarrow \alpha t_1^2$

平均の速度 $\bar{v}$[m/s]は

$$\bar{v} = \frac{\alpha t_1^2 - \alpha(t_1 - \Delta t)^2}{t_1 - (t_1 - \Delta t)} = \frac{\alpha t_1^2 - \alpha t_1^2 + 2\alpha t_1 \Delta t - \alpha(\Delta t)^2}{t_1 - t_1 + \Delta t}$$

$$= \frac{2\alpha t_1 \Delta t - \alpha(\Delta t)^2}{\Delta t} \qquad \therefore \bar{v} = 2\alpha t_1 - \alpha \Delta t$$

瞬間の速度 v[m/s]は、時間$\Delta t \rightarrow 0$ とすれば良いので、

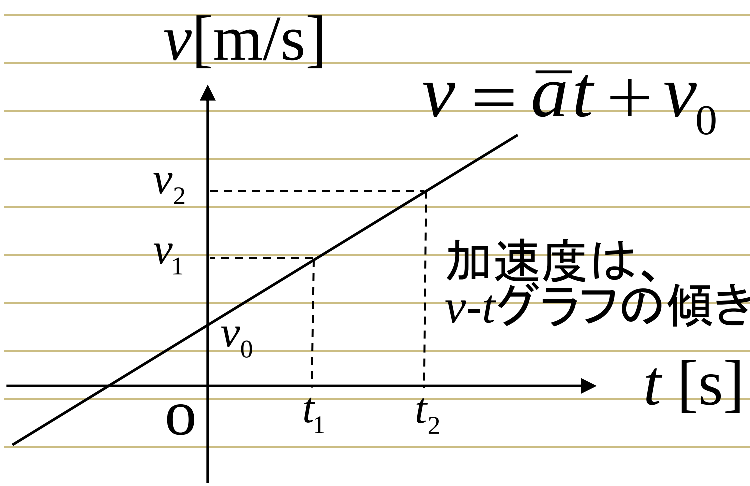
$$v = \lim_{\Delta t \to 0}(2\alpha t_1 - \alpha \Delta t) \qquad \therefore v = 2\alpha t_1$$

$$加速度[\mathrm{m/s^2}] = \frac{速度変化[\mathrm{m/s}]}{時間[\mathrm{s}]}$$

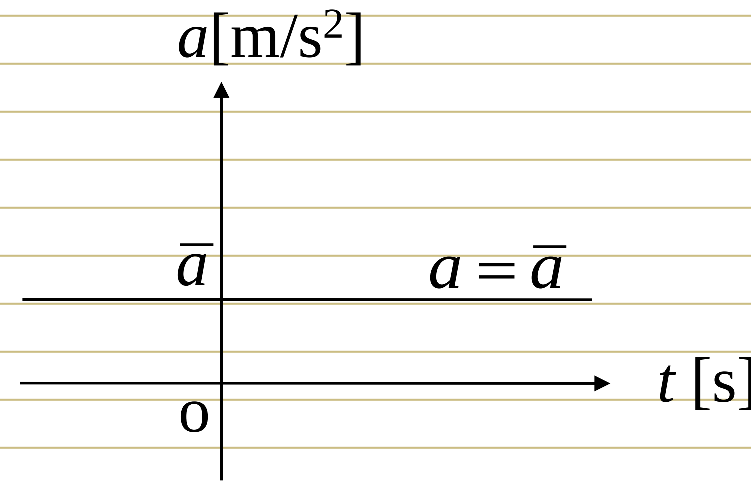
時刻[s]　$t_1 \to t_2$
速度[m/s]　$v_1 \to v_2$　のとき、平均の加速度　$\bar{a}[\mathrm{m/s^2}]$は

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

等加速度直線運動（いつも同じ加速度の運動）の場合

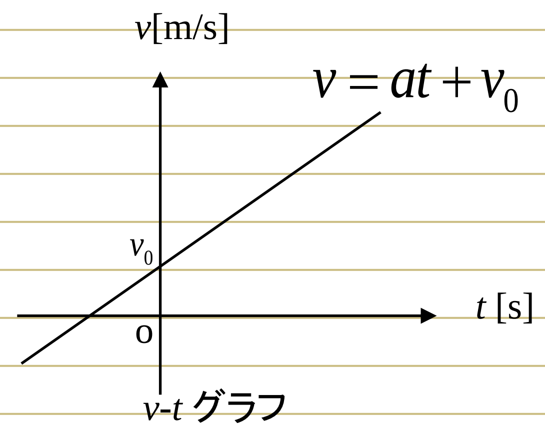


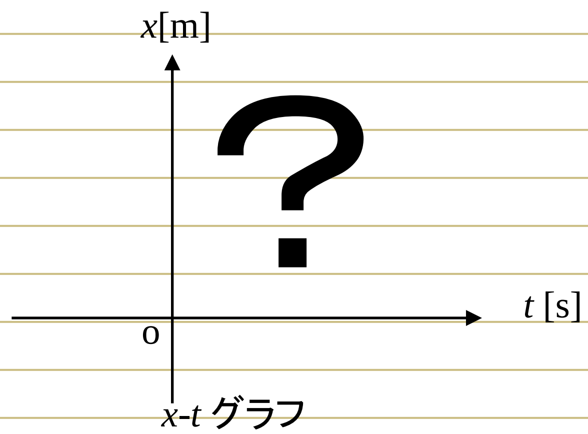
v-t グラフ



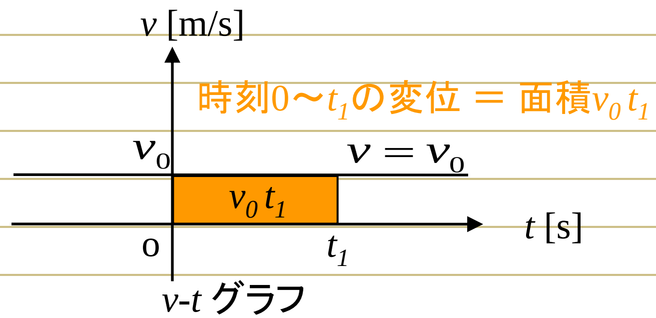
a-t グラフ

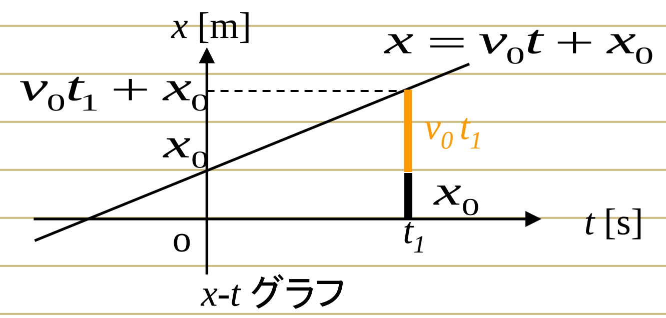
等加速度直線運動の「x-tグラフ」について





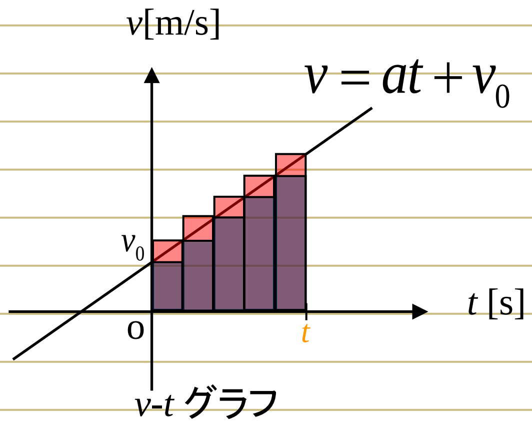
等速直線運動の場合

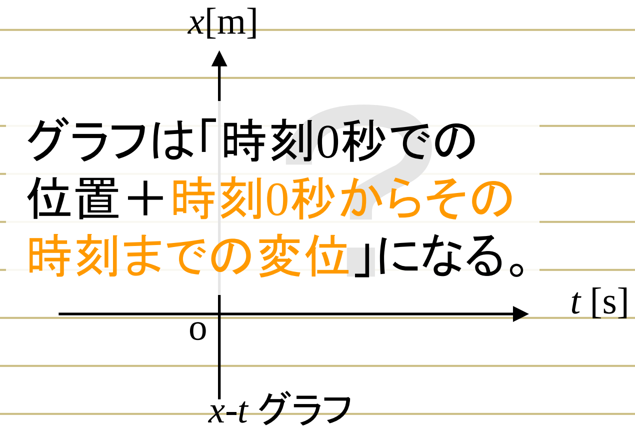




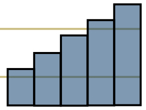
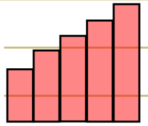
時刻t_1の位置　＝　時刻0秒での位置　x_0　＋　時刻0〜t_1の変位　$v_0 t_1$

等加速度直線運動の「x-tグラフ」について



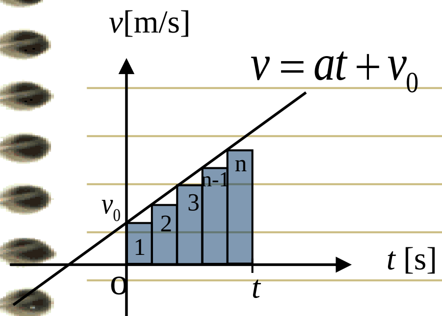


時刻 0秒から時刻 t 秒までの変位の求め方

 ≦ 時刻0〜tの変位 ≦ 

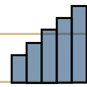
＊細かく区分するほど、近い値になる。

時刻0〜tの間を n 等分して、青階段の面積を求める。



v-t グラフ

$d=\dfrac{t-0}{n}=\dfrac{t}{n}$ とすると、



1番目面積	2番目の面積	3番目の面積

$$=v_0 d+(a\cdot d+v_0)d+(a\cdot 2d+v_0)d+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots+\{a\cdot(n-2)d+v_0\}d+\{a\cdot(n-1)d+v_0\}d$$

n-1番目の長方形の面積	n番目の長方形の面積

$$=nv_0 d+\{ad^2+2ad^2+\cdots\cdots\cdots+(n-2)ad^2+(n-1)ad^2\}$$

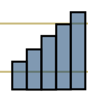
$$=nv_0 d+\{1+2+\cdots\cdots\cdots+(n-2)+(n-1)\}ad^2$$

ここで、$X=1+2+\cdots\cdots\cdots+(n-2)+(n-1)$　とすると、

$$X=\frac{\{1+2+\cdots\cdots\cdots+(n-2)+(n-1)\}+\{1+2+\cdots\cdots\cdots+(n-2)+(n-1)\}}{2}$$

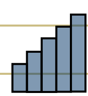
分子は、計算を工夫すると、nがn-1個になるから　$X=\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n^2-n}{2}$

したがって、



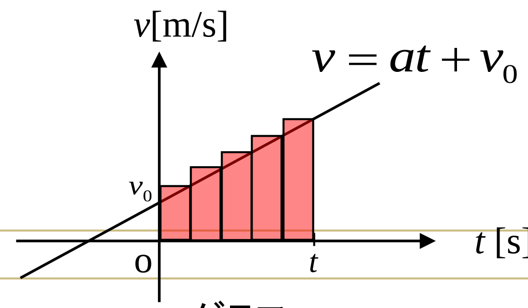
$$=nv_0 d+\frac{n^2-n}{2}ad^2$$

$d=\dfrac{t}{n}$　だから、



$$=nv_0\frac{t}{n}+\frac{n^2-n}{2}a\left(\frac{t}{n}\right)^2=v_0 t+\frac{at^2}{2}-\frac{at^2}{2n}=v_0 t+\frac{at^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

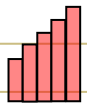
【問】 時刻0～tの間を n 等分して、赤階段の面積を求めよ。



v-t グラフ

【解】

$d=\dfrac{t-0}{n}=\dfrac{t}{n}$ とすると、



$$=(a\cdot d+v_0)d+(a\cdot 2d+v_0)d+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots+\{a\cdot(n-1)d+v_0\}d+(a\cdot nd+v_0)d$$

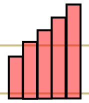
$$=nv_0d+\{ad^2+2ad^2+\cdots\cdots\cdots+(n-1)ad^2+nad^2\}$$

$$=nv_0d+\{1+2+\cdots\cdots\cdots+(n-1)+n\}ad^2$$

$$=nv_0d+\frac{(n+1)n}{2}ad^2$$

$$=nv_0d+\frac{n^2}{2}ad^2+\frac{n}{2}ad^2$$

$d=\dfrac{t}{n}$ だから、

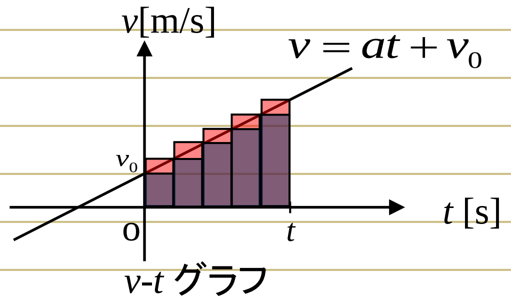


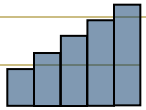
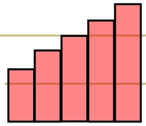
$$=nv_0\frac{t}{n}+\frac{n^2}{2}a\left(\frac{t}{n}\right)^2+\frac{n}{2}a\left(\frac{t}{n}\right)^2$$

$$=v_0t+\frac{at^2}{2}+\frac{at^2}{2n}$$

$$=v_0t+\frac{at^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

時刻 t 秒での位置 ＝ 時刻 0 秒での位置 ＋ 時刻0～tの変位



 ≦ 時刻0～tの変位 ≦ 

＊細かく区分するほど、近い値になる。

前述の計算結果より、

$$v_0 t + \frac{at^2}{2}\left(1 - \cancelto{0}{\frac{1}{n}}\right) \leqq \text{時刻0～}t\text{の変位} \leqq v_0 t + \frac{at^2}{2}\left(1 + \cancelto{0}{\frac{1}{n}}\right)$$

区分数 $n \to \infty$ とすると、$\frac{1}{n} \to 0$ となるので、

$$v_0 t + \frac{at^2}{2} \leqq \text{時刻0～}t\text{の変位} \leqq v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$\therefore \text{時刻0～}t\text{の変位} = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

☆公式☆　時刻 t 秒での位置 x は、 $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

まとめ

等加速度直線運動の

「v-tグラフ」と「x-tグラフ」は

右の様になる。

【問】「x-tグラフ」の頂点の

時刻を求めよ。

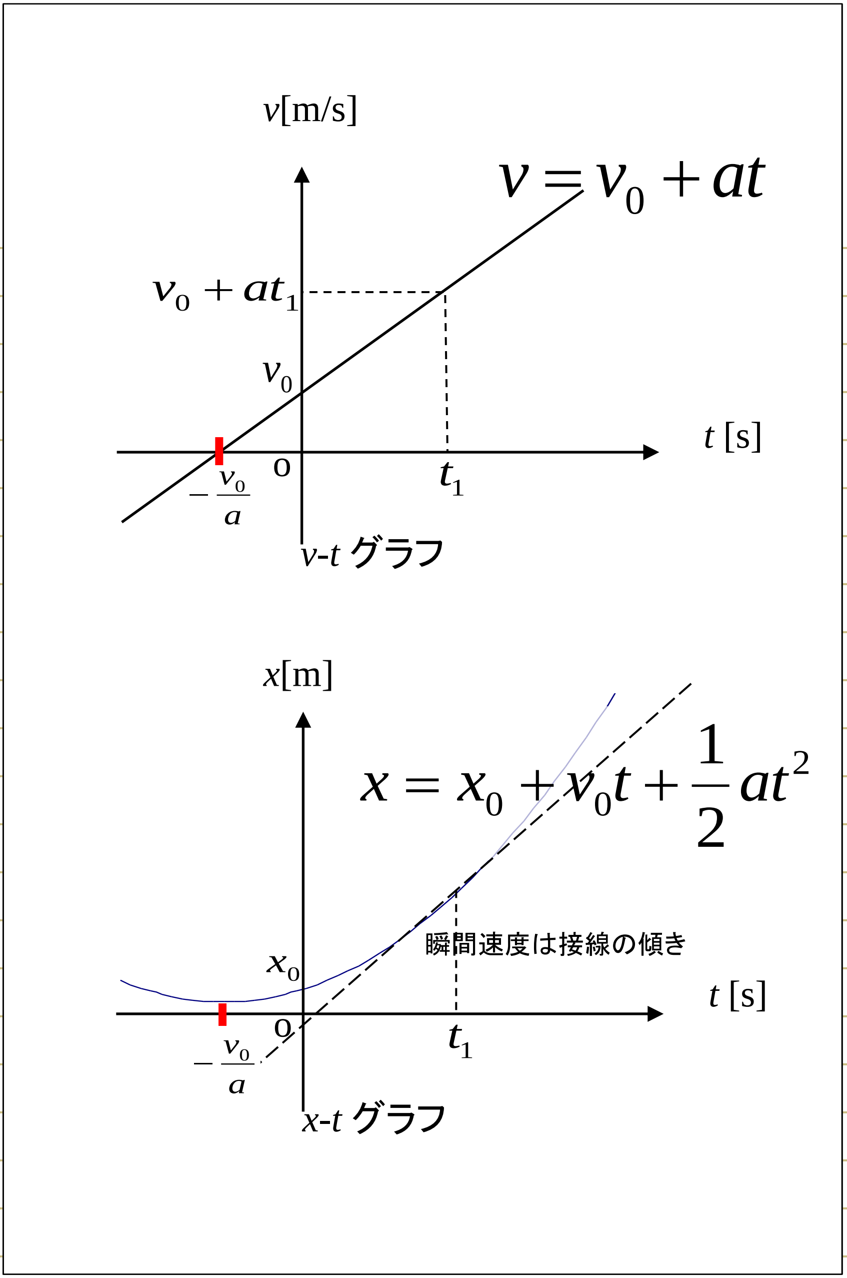
ヒント:

瞬間速度はx-tグラフの接線の傾き。

速度が0[m/s]となる時刻は何時？

【解】 $v = 0$ となる時刻は、

$0 = v_0 + at$より $\therefore t = -\dfrac{v_0}{a}$



$$速度[\mathrm{m/s}] = \frac{変位[\mathrm{m}]}{時間[\mathrm{s}]} \qquad 加速度[\mathrm{m/s^2}] = \frac{速度変化[\mathrm{m/s}]}{時間[\mathrm{s}]}$$

☆等加速度直線運動の公式（大学入試用）

等加速度直線運動の場合、加速度はいつでも同じだから、時刻0秒のときの加速度a_0と言及する必要がない。それで、ここでは、加速度だけは、a_0とせずにaと記す。

時刻t[s]の速度v[m/s] $\boxed{v = v_0 + at}$

時刻t[s]の位置x[m] $\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$

＊覚えておくと便利な公式＊

速度がv_1からv_2になるまでの変位s

$$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}$$

注）　以下の細枠部分（高校で習う。大学入試向き。）を覚えても等加速度直線運動にしか使えないので、

太枠部分（大学1年生で習う。一般向き。）を覚えて様々な運動に応用することを高専生には勧める。

☆等加速度直線運動の公式マップ

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}} \downarrow \quad \uparrow \boxed{x = x_0 + \int_0^t v\,dt}$$

$$v = v_0 + a_0 t$$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}} \downarrow \quad \uparrow \boxed{v = v_0 + \int_0^t a\,dt}$$

定義式　$a = a_0$

１．２　運動の法則

（１）　力

①　接触している物体間に働く力

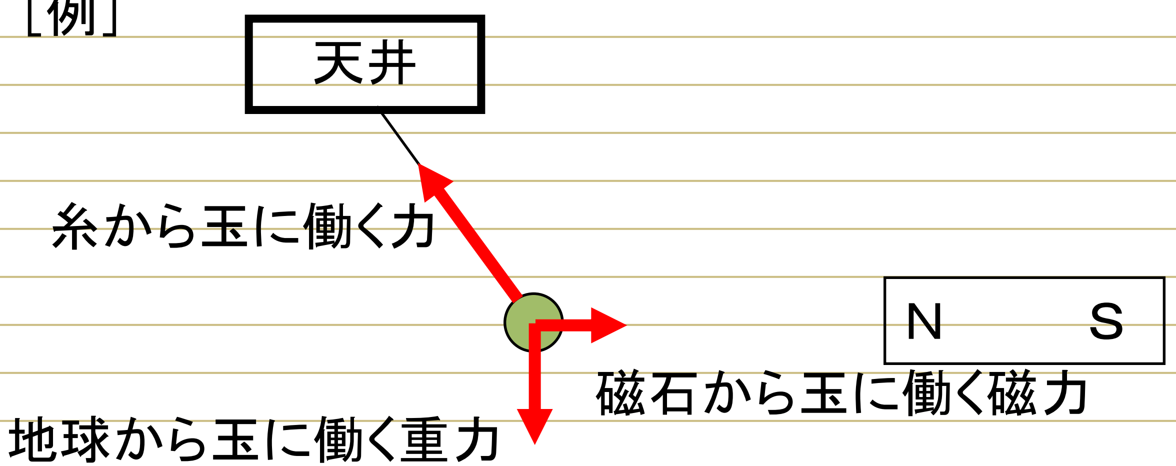
手のひらで押す力、弾性力、摩擦力、空気抵抗、・・・

②　離れていても物体間に働く力

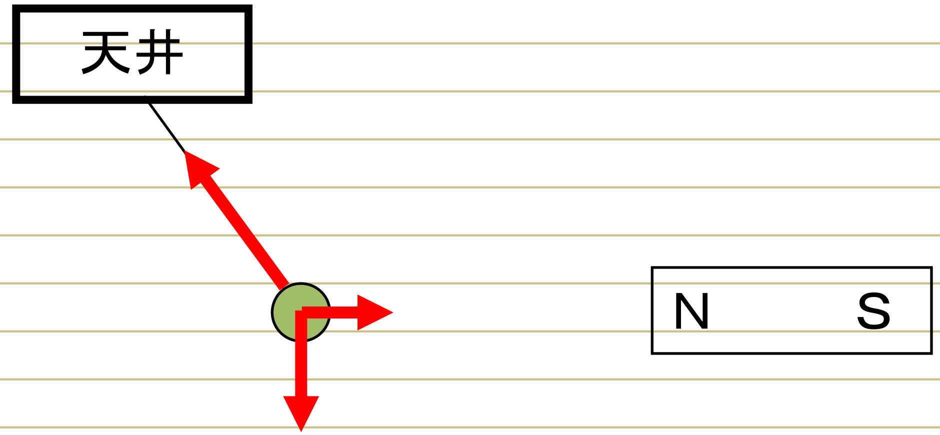
重力、電気力、磁気力　（これだけ、その他なし！）

{万有引力}

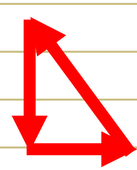
［例］



力のつりあい



玉に3つ力が働いているが、玉は静止したままである。
このとき、物体に働く力は「つり合っている」という。



力の矢印を繋ぎ足すと元に戻る。

（力の和は0になっている。）

（2） 運動の第１法則（慣性の法則）

「物体に力が働かなければ、物体は速度を変えない。」

（力が働かなければ、速くも遅くもならない、向きも変えない。）

慣性：物体が速度を保ち続けようとする性質のこと。

質量：慣性の大きさを表す量のこと。

現在、

「国際キログラム原器」
の質量を1[kg]と定義。

本物はフランスにある。
コピーは日本にもある。

（3） 運動の第2法則（運動方程式）

・力が大きいほど、物体はどんどん速くなる。

・重いほど、物体はなかなか速くならない。

「物体の加速度aは、力Fに比例し、質量mに反比例する。」ことが確かめられている。式で表すと、

$$a = k\frac{F}{m}$$

kは比例定数

質量の単位[kg]、加速度の単位[m/s^2]で、比例定数が1となる様に、力の単位を決めたものが[N]（ニュートン）という単位である。（1円玉102枚を持ったときの力が、約1[N]の力）

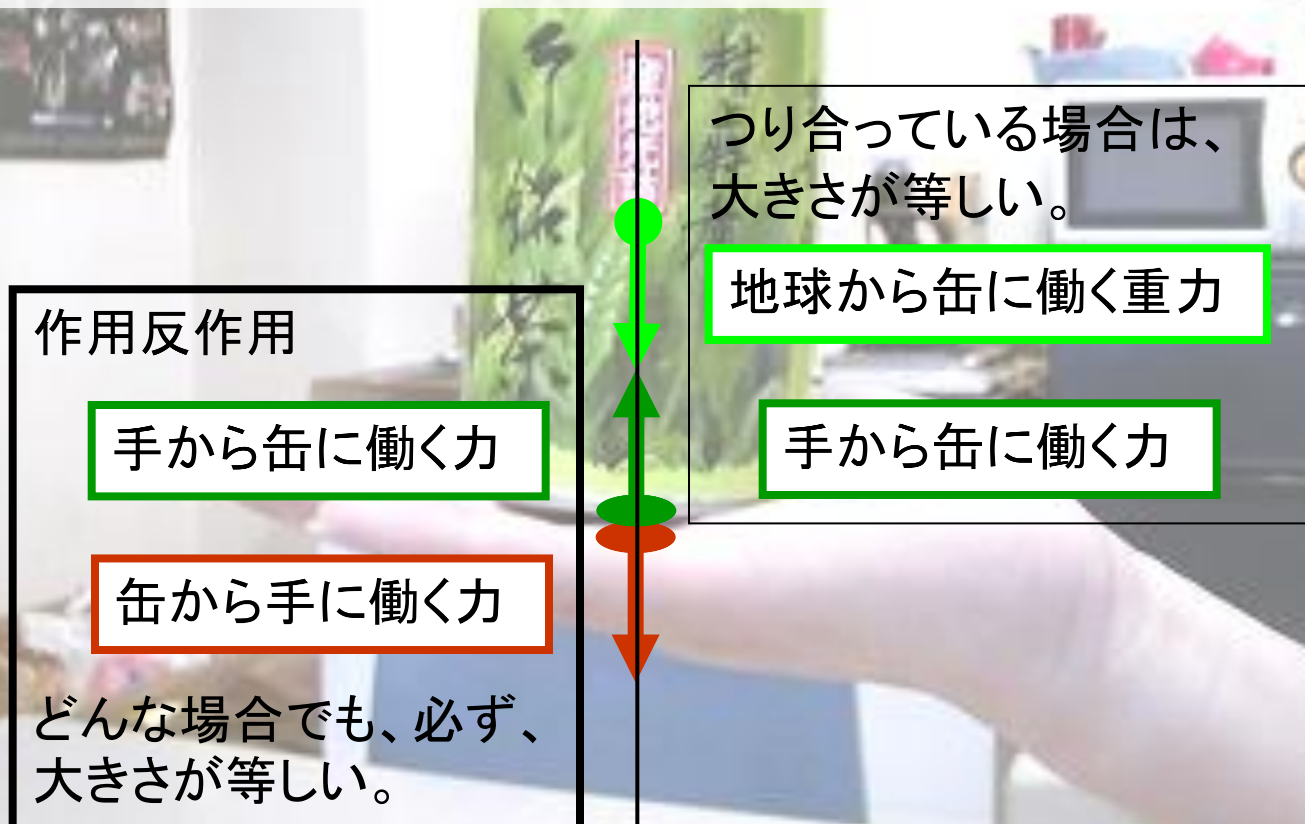
$$a[\mathrm{m/s^2}] = \frac{F[\mathrm{N}]}{m[\mathrm{kg}]}$$

$$\therefore \quad \underline{ma = F \quad [\mathrm{N}]}$$

運動方程式

（4） 運動の第3法則（作用反作用の法則）

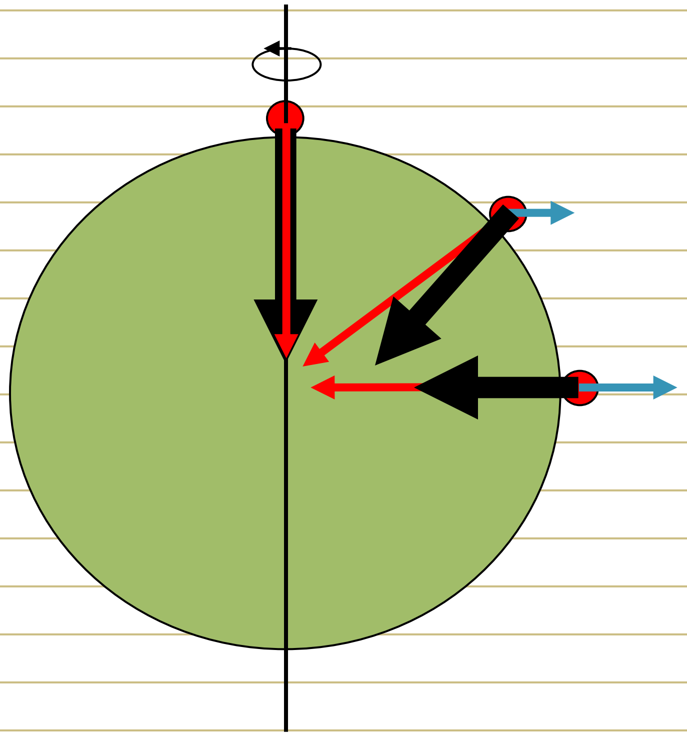
「物体Aが物体Bに力（作用）を及ぼすと、
必ず、物体Bから物体Aに力（反作用）が働く。
この二つの力は、同一直線上にあり、
大きさは等しく、向きは反対である。」



「作用反作用の法則」と「力のつり合い」を混同しないよう注意！

（5） 重力、ばねの力、摩擦力

重力＝万有引力＋遠心力（地球の自転による）



同じ物体に働く重力の大きさは、
赤道に近いほど、小さい。

$$a[\mathrm{m/s^2}] = \frac{F[\mathrm{N}]}{m[\mathrm{kg}]}$$ だから、

重力加速度（重力による加速度）も、
赤道に近いほど、小さい。

地名	重力加速度g [m/s²]
北極	9.83
パリ	9.8093
東京	9.7976
シンガポール	9.7807

万有引力の法則

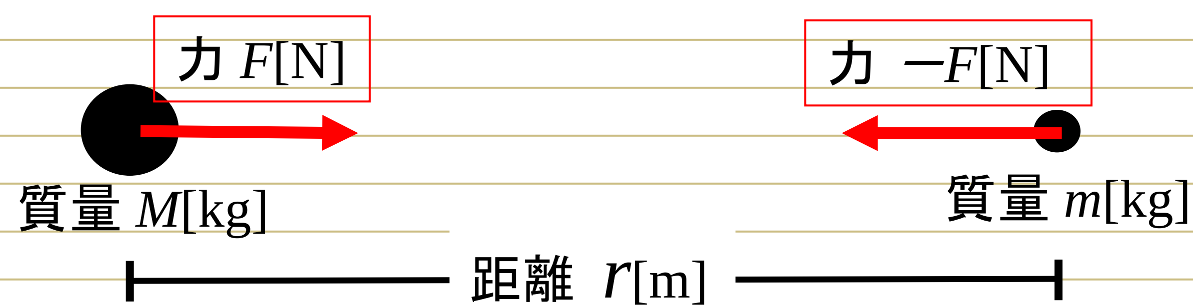
「すべての物体は互いに引力を及ぼし合い、引力の大きさは質量に比例し、距離の2乗に反比例する。」

式で表すと、

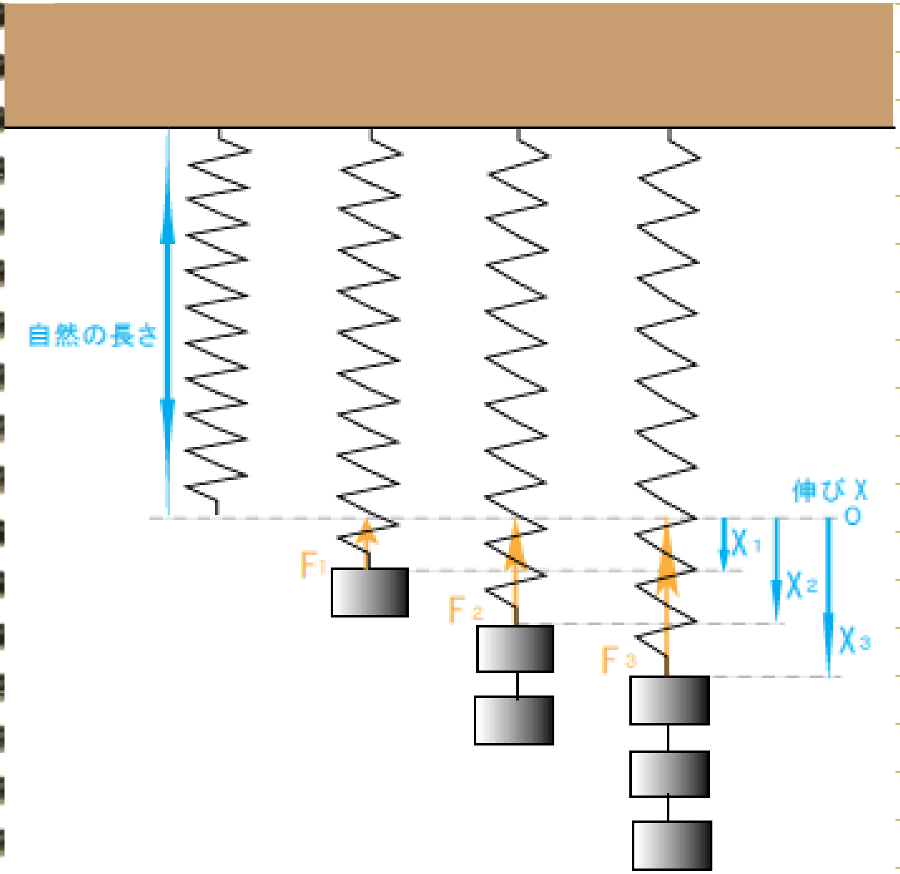
$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

（比例定数Gを「万有引力定数」という。）

$G \fallingdotseq 6.673 \times 10^{-11}$[N・m^2/kg^2]



ばねの力



フックの法則

バネの力Fは、バネの伸びxに比例し、逆向きである。

式で表すと、

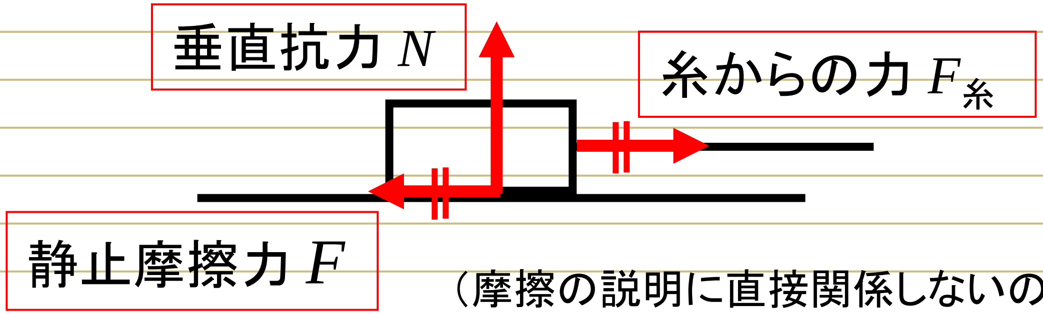
$$F = -kx \quad [\mathrm{N}]$$

kは比例定数、「ばね定数」という。

kの単位に、xの単位[m]をかけると、Fの単位[N]になればよいから、
<u>ばね定数kの単位は[N/m]である。</u>

摩擦力

① 物体が床に対して、静止しているとき。



（摩擦の説明に直接関係しないので、重力は表記省略）

＊静止摩擦力は、糸から物体に働く力に等しい。　$F=F_{糸}$

注）垂直抗力と重力は、必ずしも等しくない。（例；ｴﾚﾍﾞｰﾀｰの中など）

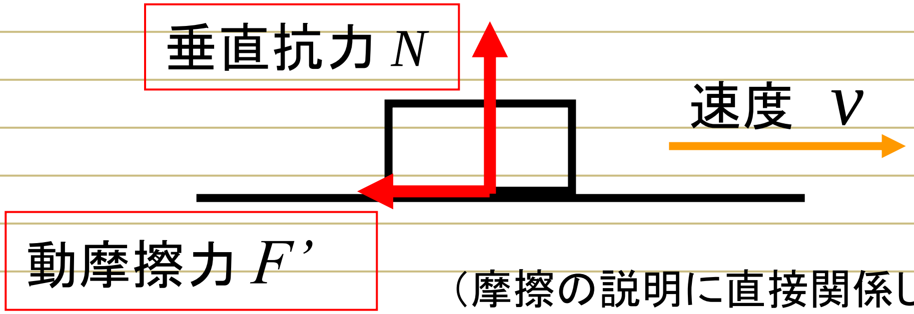
＊静止摩擦力は、大きくなる限界がある。「最大静止摩擦力」という。

＊最大静止摩擦力 F_{max}は、垂直抗力 Nに比例する。
式で表すと、

$$F_{max} = \mu N \quad [\mathrm{N}]$$

比例定数μを「静止摩擦係数」という。（単位なし）

② 物体が床に対して、動いているとき。



（摩擦の説明に直接関係しないので、重力は表記省略）

＊動摩擦力の向きは、速度の向きと逆向きである。

＊動摩擦力は、床面の条件が同じであれば、速度に寄らない。

＊動摩擦力は、静止摩擦と同様、垂直抗力に比例する。
式で表すと、

$$F' = \mu' N$$

比例定数μ'を「動摩擦係数」という。（単位なし）

☆ $\mu' < \mu$ である。（このため、重い物を動かすとき、時々失敗する。）

1．３　いろいろな直線運動

運動方程式：　$ma\ [\mathrm{kg \cdot m/s^2}] = F\ [\mathrm{N}]$

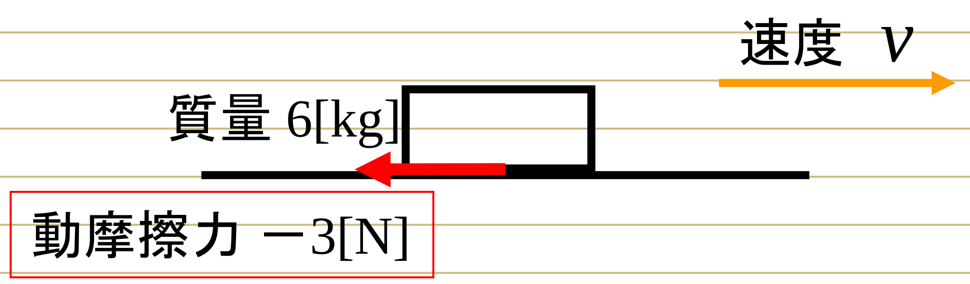
「質量 m と加速度 a の積はその物体に働く力 F に等しい。」

ｎ個の力が働いているときの運動方程式は、

$$ma = F_1 + F_2 + F_3 + \bullet\bullet\bullet + F_n$$

(1)　運動方程式のつくり方{1方向だけを考えれば良い簡単な場合、2方向は後期}

例1：運動方程式を立て、加速度を求める。

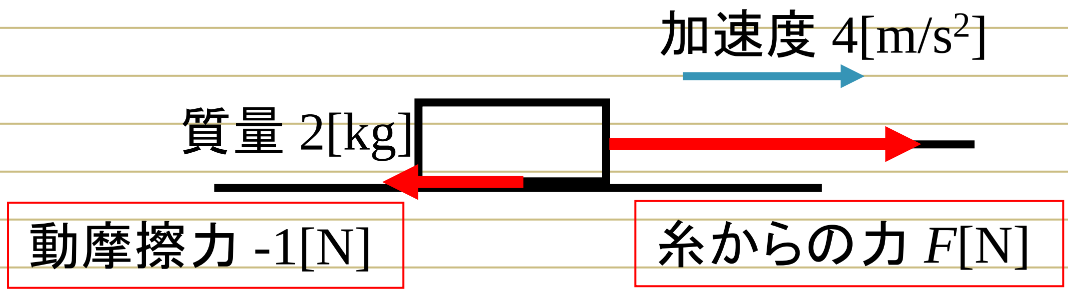


$$6a = -3$$

運動方程式

$$\therefore a = -0.5[\mathrm{m/s^2}]$$

例2：運動方程式を立て、糸から物体に働く力を求める。



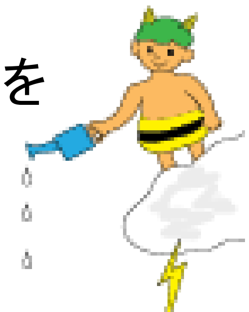
「質量と加速度の積はその物体に働く力に等しい。」から

$$\underbrace{2\times 4 = F + (-1)}_{\text{運動方程式}}$$

$$\therefore F = 9[\mathrm{N}]$$

例（番外）：雨粒の運動方程式

質量m[kg]の雨粒が速度に比例する空気抵抗を受けて落下するとき、 $$ma = mg - cv$$



下向きを正の向きとしたから、地面の高さを0とすると、雷君の如雨露口の高さは負になる。

雷君の如雨露口の高さを0とする

$$x = 0 + \left\{ \frac{mg}{c}t + \frac{m^2 g}{c^2}\exp(-\frac{c}{m}t) - \frac{m^2 g}{c^2} \right\}$$

$$a = g - \frac{c}{m}v$$

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}} \qquad \boxed{x = x_0 + \int_0^t v\,dt}$$

$$\boxed{v = \frac{mg}{c} - \frac{mg}{c}\exp(-\frac{c}{m}t)}$$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}} \qquad \boxed{v = v_0 + \int_0^t a\,dt} \qquad \boxed{v_0 = 0, \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v}$$

$$a = g\exp(-\frac{c}{m}t)$$

運動方程式を自分で立て、微分方程式をつくり、マスマティカなので解を導けることを期待する。

1．4　運動量

(1)　運動量と力積

運動量＝質量×速度

mv 　　　　　　mv'

v[m/s]　　　　　　v'[m/s]

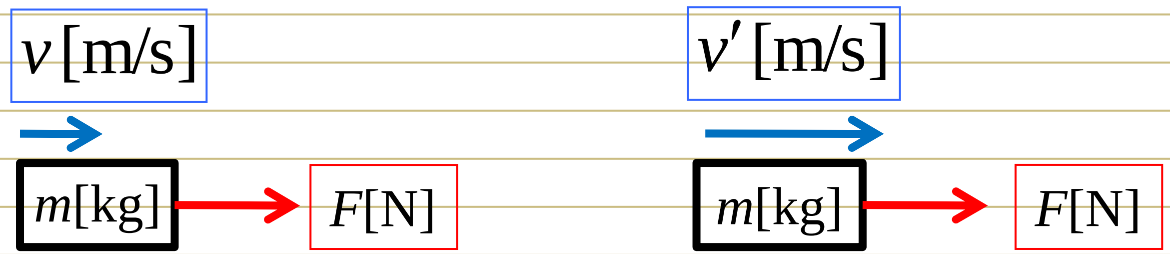
F[N]　　　　　　F[N]

m[kg]　　　　　　m[kg]

Δt 秒間、F[N] の力を加える

$F\Delta t$

力積＝力×その力が働いた時間



はじめ　　　　Δt 秒後

運動方程式 は　$ma = F$　　　加速度 は　$a = \dfrac{v' - v}{\Delta t}$ [m/s^2]

運動方程式 に加速度の右辺を代入すると、

$$m\frac{v' - v}{\Delta t} = F$$

式 を変形と、

$$mv' - mv = F\Delta t$$

「運動量の変化は力積に等しい」

(2) 運動量保存の法則

衝突前　$\boxed{m_1\ [\mathrm{kg}]}$　$\xrightarrow{v_1\ [\mathrm{m/s}]}$　　$\boxed{m_2\ [\mathrm{kg}]}$　$\xrightarrow{v_2\ [\mathrm{m/s}]}$

「物体2から1に働く力」と「物体1から2に働く力」は

衝突　$-F\ [\mathrm{N}]$ ← $\boxed{m_1\ [\mathrm{kg}]}\boxed{m_2\ [\mathrm{kg}]}$ → $F\ [\mathrm{N}]$

作用・反作用の関係にある。

衝突後　$\boxed{m_1\ [\mathrm{kg}]}$　$\xrightarrow{v_1'\ [\mathrm{m/s}]}$　　$\boxed{m_2\ [\mathrm{kg}]}$　$\xrightarrow{v_2'\ [\mathrm{m/s}]}$

「運動量の変化は力積に等しい」ので、衝突時間を Δt 秒とすると、

$$m_1 v_1' - m_1 v_1 = -F\Delta t \quad \text{——} ① \quad 、\quad m_2 v_2' - m_2 v_2 = F\Delta t \quad \text{——} ②$$

①の右辺に②の左辺を代入すると、

$$m_1 v_1' - m_1 v_1 = -(m_2 v_2' - m_2 v_2)$$

$$\therefore m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

「衝突後の運動量の和は衝突前の運動量の和に等しい。」

これを「運動量保存の法則」という。