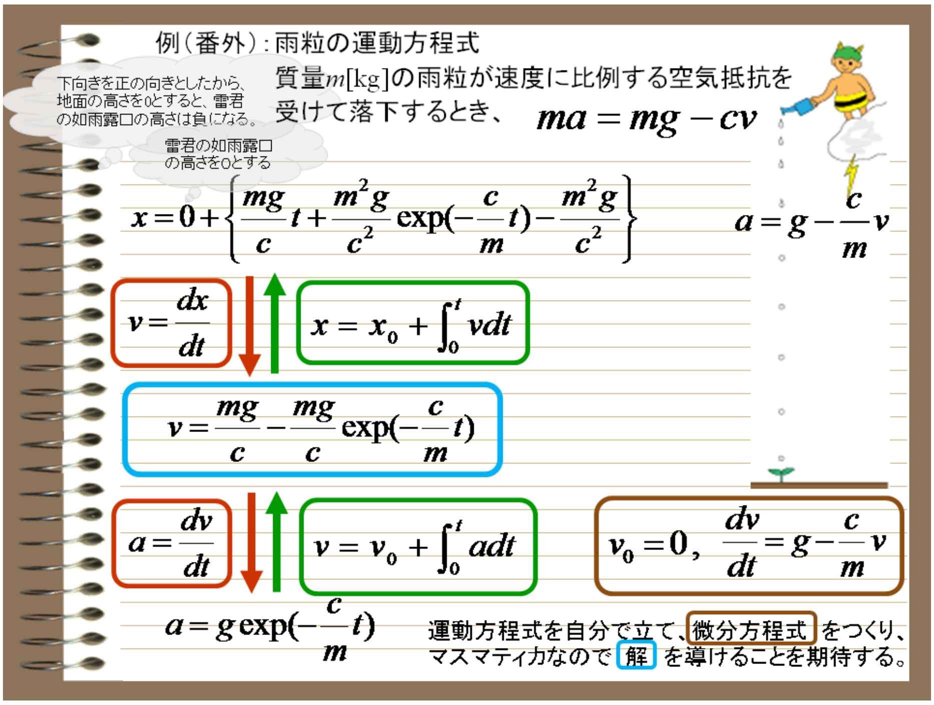
数式処理ソフトの選定

(*Wolfram Mathematica8* 夏の合宿2011)

計算尺から関数電卓へ、関数電卓からＰＣへ、ＰＣから能力の高いコンピュータを外に持つ通信機器へと、研究開発のための身近な計算道具も変わってきている。道具が変われば、やり方も変わる。したがって、研究開発の基礎力として必要な「現象の数式化力」も昔と変わってきている。現状がどの程度かを確かめるため、今回の夏の合宿に参加した。私の周りで数式処理ソフトを使っている人の多くが使っているので、Mathematicaから始めた。

数式を「自分で解く」から「数式処理ソフトで解く」への移行時間の短縮が数式処理ソフトの有効性を学生に理解してもらうための鍵になると思う。解を得るための作業が授業で習ったように進められるかどうかが移行時間の短縮の目安になると考え、このことについて調べた。

雨粒の運動について



- 運動方程式を考え、それを解く。
- 粘性抵抗が影響すると考えた場合

高校物理の教科書では空気の粘性抵抗を紹介しているものが多い。速度に比例した空気抵抗の場合、高校数学の知識で解けることやミリカンの実験で使うことなどからそうなっているものと推測する。

$$ma = mg - cv$$

これをMathematicaで解くと、

$$\texttt{DSolve}\left[\left\{v'[t] == g - \frac{c}{m} v[t],\ v[0] == 0\right\},\ v[t],\ t\right]$$

$$\left\{\left\{v[t] \to \frac{e^{-\frac{c t}{m}}\left(-1 + e^{\frac{c t}{m}}\right) g\, m}{c}\right\}\right\}$$

「呪文にしか見えない？」と思う。　数学を習っただけでは、使うのは難しい。

- 慣性抵抗が影響と考えた場合

雷君は霧雨だけを降らせるわけではない。雷君がもう少し大きな雨粒を落とした場合の運動方程式は

$$ma = mg - cv^2$$

これをMathematicaで解くと、

```
DSolve[{v'[t] == g - c/m v[t]^2, v[0] == 0}, v[t], t]
```

Ｓｏｌ:vｉｅｆｕｎ

逆関数がＳｏｌで使われているため，求められない解がある可能性があります．解の詳細情報にはＲｅｄｕｃｅをお使いくださ

． ≫

$$\left\{\left\{v[t] \to \frac{\sqrt{g}\ \sqrt{m}\ \mathrm{Tanh}\left[\frac{\sqrt{c}\ \sqrt{g}\ t}{\sqrt{m}}\right]}{\sqrt{c}}\right\}\right\}$$

粘性抵抗のときと同じ呪文で解を得られるが、数学を習っただけでは、使うのは難しい。

- どちらの抵抗も影響すると考えた場合

空気抵抗の両方がたし合わされた場合でも、解が求められる。

```
DSolve[{v'[t] == g - c1/m v[t] - c2/m v[t]^2, v[0] == 0}, v[t], t]
```

Ｓｏｌ:vｉｅｆｕｎ

逆関数がＳｏｌで使われているため，求められない解がある可能性があります．解の詳細情報にはＲｅｄｕｃｅをお使いくださ

． ≫

$$\left\{\left\{v[t] \to \frac{1}{2\,c2}\left(-c1 + \sqrt{-c1^2 - 4\,c2\,g\,m}\ \mathrm{Tan}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{-c1^2 - 4\,c2\,g\,m}\ t}{m} - 2\,\mathrm{ArcCos}\left[-\frac{\sqrt{c1^2 + 4\,c2\,g\,m}}{2\sqrt{c2}\ \sqrt{g}\ \sqrt{m}}\right]\right)\right]\right)\right\},\right.$$

$$\left\{v[t] \to \frac{1}{2\,c2}\left(-c1 + \sqrt{-c1^2 - 4\,c2\,g\,m}\ \mathrm{Tan}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{-c1^2 - 4\,c2\,g\,m}\ t}{m} + 2\,\mathrm{ArcCos}\left[-\frac{\sqrt{c1^2 + 4\,c2\,g\,m}}{2\sqrt{c2}\ \sqrt{g}\ \sqrt{m}}\right]\right)\right]\right)\right\},$$

$$\left\{v[t] \to \frac{1}{2\,c2}\left(-c1 + \sqrt{-c1^2 - 4\,c2\,g\,m}\ \mathrm{Tan}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{-c1^2 - 4\,c2\,g\,m}\ t}{m} - 2\,\mathrm{ArcCos}\left[\frac{\sqrt{c1^2 + 4\,c2\,g\,m}}{2\sqrt{c2}\ \sqrt{g}\ \sqrt{m}}\right]\right)\right]\right)\right\},$$

$$\left.\left\{v[t] \to \frac{1}{2\,c2}\left(-c1 + \sqrt{-c1^2 - 4\,c2\,g\,m}\ \mathrm{Tan}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{-c1^2 - 4\,c2\,g\,m}\ t}{m} + 2\,\mathrm{ArcCos}\left[\frac{\sqrt{c1^2 + 4\,c2\,g\,m}}{2\sqrt{c2}\ \sqrt{g}\ \sqrt{m}}\right]\right)\right]\right)\right\}\right\}$$

- 得られた速度の解から位置を求める。
- 粘性抵抗が影響すると考えた場合

速度に比例した空気抵抗を受けるときの速度は

$$\mathbf{v[t]} = \frac{e^{-\frac{c\,t}{m}}\left(-1+e^{\frac{c\,t}{m}}\right) g\, m}{c}$$

$$\frac{e^{-\frac{c\,t}{m}}\left(-1+e^{\frac{c\,t}{m}}\right) g\, m}{c}$$

ある時刻（高校物理では時刻0秒）の位置と任意の時刻の位置の関係式は

$$x(t)=x_0+\int_0^t v(t)\, dt$$

だから、雷君を基準にとると、

$$\mathbf{x[t]} = 0+\int_0^t \mathbf{v[t]}\, dt$$

$$\frac{g\, m\left(\left(-1+e^{-\frac{c\,t}{m}}\right) m + c\, t\right)}{c^2}$$

数学で習う記号の通り入力し、答えを得ることができた。非常に良いと思う。
これを展開すると、

Expand[x[t]]

$$-\frac{g\, m^2}{c^2}+\frac{e^{-\frac{c\,t}{m}} g\, m^2}{c^2}+\frac{g\, m\, t}{c}$$

展開は呪文となってしまう。

- 慣性抵抗が影響と考えた場合

速度の２乗に比例した空気抵抗を受けるときの速度は

$$\mathbf{v[t]} = \frac{\sqrt{g}\,\sqrt{m}\,\mathrm{Tanh}\left[\frac{\sqrt{c}\,\sqrt{g}\,t}{\sqrt{m}}\right]}{\sqrt{c}}$$

$$\frac{\sqrt{g}\,\sqrt{m}\,\mathrm{Tanh}\left[\frac{\sqrt{c}\,\sqrt{g}\,t}{\sqrt{m}}\right]}{\sqrt{c}}$$

ある時刻（高校物理では時刻0秒）の位置と任意の時刻の位置の関係式は

$$x(t)=x_0+\int_0^t v(t)\, dt$$

だから、雷君を基準にとると、

$$\mathbf{x[t]} = 0+\int_0^t \mathbf{v[t]}\, dt$$

$$\frac{m\,\mathrm{Log}\left[\mathrm{Cosh}\left[\frac{\sqrt{c}\,\sqrt{g}\,t}{\sqrt{m}}\right]\right]}{c}$$

粘性抵抗のときと同じ式で、数学で習う記号の通り入力し、答えを得ることができた。

- 得られた速度の解から加速度を求める。
- 粘性抵抗が影響すると考えた場合

速度に比例した空気抵抗を受けるときの速度は

$$\mathbf{v[t]} = \frac{e^{-\frac{c\,t}{m}}\left(-1+e^{\frac{c\,t}{m}}\right) g\, m}{c}$$

$$\frac{e^{-\frac{c\,t}{m}}\left(-1+e^{\frac{c\,t}{m}}\right) g\, m}{c}$$

加速度は

$$a(t)=\frac{d}{d\,t}v(t)$$

だから、

```
D[v[t], t]
```

$$g-e^{-\frac{c\,t}{m}}\left(-1+e^{\frac{c\,t}{m}}\right) g$$

数学を習っただけでは、使うのは難しい。

- 慣性抵抗が影響と考えた場合

速度の２乗に比例した空気抵抗を受けるときの速度は

$$\mathbf{v[t]} = \frac{\sqrt{g}\,\sqrt{m}\,\mathrm{Tanh}\left[\frac{\sqrt{c}\,\sqrt{g}\,t}{\sqrt{m}}\right]}{\sqrt{c}}$$

$$\frac{\sqrt{g}\,\sqrt{m}\,\mathrm{Tanh}\left[\frac{\sqrt{c}\,\sqrt{g}\,t}{\sqrt{m}}\right]}{\sqrt{c}}$$

加速度は

$$a(t)=\frac{d}{d\,t}v(t)$$

だから、

```
D[v[t], t]
```

$$g\,\mathrm{Sech}\left[\frac{\sqrt{c}\,\sqrt{g}\,t}{\sqrt{m}}\right]^2$$

粘性抵抗のときと同じ呪文で解を得られるが、数学を習っただけでは、使うのは難しい。

基本的なコマンドの不足

コマンド $\frac{dy}{dx}$ を使った以下の命令

入力 $y = ax^2 + bx + c\ ;\ \frac{dy}{dx}$ Shift + Enter

出力 $2ax+b$

まとめ

　中学や高校で習う数学の知識だけで、使い方の説明を行わず、日本語で使わせるのは難しい。しかし、粘性抵抗であれ、慣性抵抗であれ、同じパターンで解を得ることができる。ここでは省略したが、簡単な呪文で、グラフも描ける。導入部分を入りやすくして貰うことで、数学のパターン化された解法の訓練から解放されるのではないかと思う。過度の練習時間を他の教育時間に使えれば、新し

いものが生まれる可能性があると思う。
　積分は非常に使いやすい。数学で習ったように入力するだけで、解が得られる。一方、微分が使い辛い。ドットやダッシュを使った微分記号より、$\frac{dy}{dx}$の方が物理では使われている。物理現象のイメージを伝えるため、$\frac{dy}{dx}$を分数のように扱って、説明に使う場合も多い。工学系の教科書でも、同様の方法で説明しているものが多い。英語で使えるMathematicaの自由形式入力を日本語でも使えるようになったとしても、是非欲しいコマンドである。
（今回の合宿で作成できなかったのが残念。）