11回目授業レジュメ (その2)

電気工学科 准教授 南政孝
http://www.kobe-kosen.ac.jp/~minami/

平成29年6月27日 (火)

本日の内容

1.3.6 ストークス (Stokes) の定理

ベクトル場の回転

ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ に対して, 単一閉曲線 C に沿うベクトル $\boldsymbol{a}$ の線積分とその面積 S の比が $S \to 0$ の極限で一定値に収束する. 例えば, xy 平面では,

$$\begin{aligned}
\oint \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= a_x(x_0,y_0)\Delta x + a_y(x_0+\Delta x, y_0)\Delta y \\
&\quad -a_x(x_0,y_0+\Delta y)\Delta x - a_y(x_0,y_0)\Delta y \\
&= a_x(x_0,y_0)\Delta x \\
&\quad +\left\{a_y(x_0,y_0)+\Delta x\frac{\partial}{\partial x}a_y(x_0,y_0)\right\}\Delta y \\
&\quad -\left\{a_x(x_0,y_0)+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}a_x(x_0,y_0)\right\}\Delta x \\
&\quad -a_y(x_0,y_0)\Delta y \\
&= \left\{\frac{\partial}{\partial x}a_y(x_0,y_0)-\frac{\partial}{\partial y}a_x(x_0,y_0)\right\}\Delta x\Delta y
\end{aligned}$$

$$\lim_{S\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{S} = \frac{\partial}{\partial x}a_y(x_0,y_0)-\frac{\partial}{\partial y}a_x(x_0,y_0)$$

面の取り方によって, 極限値は異なる

$$\lim_{S_1\to 0}\frac{\oint_{C_1}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{S_1} \neq \lim_{S_2\to 0}\frac{\oint_{C_2}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{S_2}$$

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ $(\nabla\times\boldsymbol{a})$ について

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ の大きさ, $|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}|$: $\displaystyle\lim_{S\to 0}\frac{\oint_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{S}$ の最大値

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ の方向: $|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}|$: $\displaystyle\lim_{S\to 0}\frac{\oint_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{S}$ の最大となる面 S に垂直で右ねじの方向

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n} = \lim_{S\to 0}\frac{\oint_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{S}$$

微小面積素に対して,

$$((\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n})\Delta S = \oint_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

ストークス (Stokes) の定理

単一閉曲線 C を曲面 S の境界とする. S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは, S 上で $\boldsymbol{n}$ が連続的に変わるようにとる. S の2つ側のうち, $\boldsymbol{n}$ の向く側を S の正の側とする. C の向きは, S の正の側に立ち C に沿って進むとき, S が常に左側にあるようにする.

ストークスの定理

S を含むある範囲で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{a}$ に対して,

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \oint_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

[証明]

S を微小面積素に分割する. 微小面積素の周辺を C と同じ向きになるようにとる. (ΔC_i)

微小面積素に対して,

$$((\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}_i)\Delta S_i = \oint_{\Delta C_i}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

総和を考える.

左辺の総和は, $\displaystyle\int_S (\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$

右辺の総和は, $C=\displaystyle\sum_i \Delta C_i$ なので, $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

$$\therefore \int_S (\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \oint_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \square$$

Gauss の発散定理と Stokes の定理まとめ

Gauss の発散定理　面積分と体積分

$$\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \quad = \quad \int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}V$$

Stokes の定理　線積分と面積分

$$\oint_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad = \quad \int_S (\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

ドリル

pp. 59–60 (no. 30) (かかった時間も記載せよ)

授業レポート

(かかった時間も記載せよ)

例題 9

S を半球面 $x^2+y^2+z^2=1$ $(z\geq 0)$ とし, S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は球面から外向きとする．S の境界を $C: \boldsymbol{r}(t)=(\cos t, \sin t, 0)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ と定める．$\boldsymbol{a}=(2x-y, -yz^2, -y^2z)$ のとき, $\displaystyle\int_S (\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ を求めよ．

問 12

S を半球面 $x^2+y^2+z^2=1$ $(z\geq 0)$ とし, S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は球面から外向きとする．S の境界を $C: \boldsymbol{r}(t)=(\cos t, \sin t, 0)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ と定める．$\boldsymbol{a}=(y, x-2zx, -xy)$ のとき, $\displaystyle\int_S (\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ を求めよ．

問 13

単一閉曲線 C を曲面 S の境界とする．S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは, S 上で $\boldsymbol{n}$ が連続的に変わるようにとる．S の 2 つ側のうち, $\boldsymbol{n}$ の向く側を S の正の側とする．C の向きは, S の正の側に立ち C に沿って進むとき, S が常に左側にあるようにする．S を含むある範囲で定義されたスカラー場 φ, ψ について, 次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\int_C (\varphi\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad = \quad \int_S (\nabla\varphi\times\nabla\psi)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

おまけ

[8C-07] (編入数学過去問特訓 p.134)

円柱座標 (r,θ,z) が直交座標 (x,y,z) によって定義されるとき, (1) から (3) の問いに答えよ．円柱座標 (r,θ,z) と直交座標 (x,y,z) の関係は以下の通りである．

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z\ (r\geq 0, 0\leq\theta\theta 2\pi)$

(1) 円柱座標 (r,θ,z) が直交曲線座標であることを示せ．

(2) 円柱座標 (r,θ,z) の基本ベクトル $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ を求めよ．

(3) 曲面 $z=x^2+y^2$ と $z=18-(x^2+y^2)$ で囲まれた領域を V とするとき, 積分

$\displaystyle\int_V \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}V$

の値を求めよ．

[北海道大学 - 工学部]

[8C-08] (編入数学過去問特訓 p.134)

(1) $z=x^2-y^2$ のグラフの表す曲面の xy 平面 $z=0$ による切り口はどんな図形になるか, 方程式と図で説明せよ．

(2) $z=x^2-y^2$ のグラフの表す曲面と, 柱面 $x^2+y^2=1$ と xy 平面 $z=0$ で囲まれる立体図形: $0\leq z\leq x^2-y^2, x^2+y^2\leq 1$ の体積を求めよ．

(3) $z=x^2-y^2$ のグラフの表す曲面が, 柱面 $x^2+y^2=1$ で切り取れられる部分: $z=x^2-y^2, x^2+y^2\leq 1$ の曲面積を求めよ．

[九州大学 - 工学部]