応用数学I　前期レポート課題

受験番号 | | | | | | |—| | |

担当: 電気工学科 講師 南政孝

所属: 　　　名前:

5を法として, 自分の学籍番号と合同な問題番号を解答せよ.
(ex. 111207の学生は, 2, 7, 12, 17, 22, 27番の問題を解く.)

1. 基本ベクトル $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ を三辺として立方体を作り, 原点から出る三つの面対角線(面の上の対角線)を, 原点を始点とするベクトルと考えて, それらの内積および外積を求めよ. また, それらのなす角を求めよ.

2. 四点 $4\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $-\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $3\mathbf{i}+9\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $4(-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ が同一平面上にあることを証明せよ.

3. 四面体の頂点の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ とすれば, その体積は次の式で与えられることを証明せよ. ただし, [　] はグラスマンの記号である.
$\dfrac{1}{6}[\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}]$, あるいは $\dfrac{1}{6}\Big\{[\boldsymbol{abc}]-[\boldsymbol{abd}]+[\boldsymbol{acd}]-[\boldsymbol{bcd}]\Big\}$

4. 原点を始点とする三つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は一つの平面を定める. 原点からその平面に至る距離を求めよ. また, 原点から $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の終点を結ぶ直線に至る距離を求めよ.

5. $\boldsymbol{e}$ を単位ベクトル, $\boldsymbol{A}$ を任意のベクトルとするとき, 以下の関係式を証明せよ.
$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{e})$$

6. 次の等式を証明せよ.
$$\boldsymbol{A}\cdot\{\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\} = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})$$

7. 次の等式を証明せよ. ただし, [　] はグラスマンの記号である.
$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = [\boldsymbol{ABD}]\boldsymbol{C} - [\boldsymbol{ABC}]\boldsymbol{D} = [\boldsymbol{ACD}]\boldsymbol{B} - [\boldsymbol{BCD}]\boldsymbol{A}$$

8. 次の等式を証明せよ．ただし, [　] はグラスマンの記号である．

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{f}] &= [\boldsymbol{abe}][\boldsymbol{fcd}]-[\boldsymbol{abf}][\boldsymbol{ecd}]\\ &= [\boldsymbol{abd}][\boldsymbol{cef}]-[\boldsymbol{abc}][\boldsymbol{def}]\\ &= [\boldsymbol{cda}][\boldsymbol{bef}]-[\boldsymbol{cdb}][\boldsymbol{aef}]\end{aligned}$$

9. 次の式を t で微分せよ．ただし, $\boldsymbol{r}$ は t の関数, $\boldsymbol{a}$ は定ベクトルとする．

$$\frac{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{r}^2+\boldsymbol{a}^2}$$

10. 次の式を t で微分せよ．ただし, $\boldsymbol{r}$ は t の関数, $\boldsymbol{a}$ は定ベクトルとする．

$$\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}}$$

11. n を定数, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を定ベクトルとするとき, $\boldsymbol{r}=(\cos nt)\boldsymbol{a}+(\sin nt)\boldsymbol{b}$ ならば, 次の式が成立することを証明せよ．

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}+n^2\boldsymbol{r} = 0$$

12. n を定数, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を定ベクトルとするとき, $\boldsymbol{r}=(\cos nt)\boldsymbol{a}+(\sin nt)\boldsymbol{b}$ ならば, 次の式が成立することを証明せよ．

$$\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = n\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

13. n を定数, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を定ベクトルとするとき, $\boldsymbol{r}=(\cos nt)\boldsymbol{a}+(\sin nt)\boldsymbol{b}$ ならば, 次の式が成立することを証明せよ．ただし, [　] はグラスマンの記号である．

$$\left[\boldsymbol{r}\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right] = 0$$

14. n を定数, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を定ベクトルとするとき, $\boldsymbol{r}=\mathrm{e}^{nt}\ \boldsymbol{a}+\mathrm{e}^{-nt}\ \boldsymbol{b}$ ならば, 次の式が成立することを証明せよ．

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}-n^2\boldsymbol{r} = 0$$

15. 次式を満足する $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよ．ただし, $\boldsymbol{r}(0)=0,\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t(0)=0$, さらに $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を定ベクトルとする.

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}$$

16. 次の等式を証明せよ.

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

17. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を定ベクトル, $\boldsymbol{r}$ を位置ベクトルとするとき, 次式を証明せよ.

$$\nabla\{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\} = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{c}$$

18. $u(x,y,z),\ v(x,y,z)$ において, $f(u,v)=0$ ならば, $\nabla u\times\nabla v=0$ であることを証明せよ.

19. $u(x,y,z),\ v(x,y,z),\ w(x,y,z)$ において, $f(u,v,w)=0$ ならば, $[\nabla u\nabla v\nabla w]=0$ であることを証明せよ．ただし, [　] はグラスマンの記号である.

20. $u(x,y,z)$ の関数を $f(u)$ とするとき, 次式を証明せよ.

$$f(u)\nabla u = \nabla\int f(u)\mathrm{d}u$$

21. 次式を証明せよ．ただし, [　] はグラスマンの記号である．($(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)$, $(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)$ はスカラー演算子であり, $\boldsymbol{v}$ に作用する)

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{v}]$$

22. $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi$ ならば, 次式が成立することを証明せよ.

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$$

23. $\boldsymbol{a}$ が一定なベクトルならば, 次式が成立することを証明せよ.

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}\cdot\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})$$

24. 次式を証明せよ.

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \ = \ -\nabla^2\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$$

25. $\mathrm{div}\boldsymbol{F} = 0$ ならば, 次式を証明せよ.

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \ = \ \nabla^2\nabla^2\boldsymbol{F}$$

26. 閉曲面 S によって囲まれた領域 V, 曲面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ とすれば, 次式が成立することを証明せよ.

$$\int_S (\nabla\varphi \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \ = \ -\int_V \nabla\varphi \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$$

27. 閉曲面 S によって囲まれた領域 V, 曲面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ とすれば, 次式が成立することを証明せよ.

$$-\int_V \boldsymbol{r}\mathrm{d}V \ = \ \frac{1}{2}\int_S r^2\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

28. 閉曲線に関して, 次式を証明せよ.

$$\oint \varphi\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \ = \ -\oint \psi\nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

29. A(0, 1, 0) から B(2, 0, 0) に至る次の各曲線に関する $f = x^2 - y^2$ の線積分の値を求めよ.

(i) 直線 $x + 2y = 2$

(ii) AD, DB ただし, D(1, 1, 0)

(iii) AO, OB ただし, O は原点

30. 曲面 $z = 2 - x^2 - y^2$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$ に対応する部分を S とするとき, 曲面 S に関する $f = x^2 + y^2$ の面積分の値を求めよ.