# 3回目授業レジュメ

電気工学科 講師 南政孝
http://www.kobe-kosen.ac.jp/~minami/

平成26年4月28日(月)

## 本日の内容



## 1.1.2 内積と外積

- 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

  内積, スカラー積, ドット積と呼ばれる.

  ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が $\theta$ の角をなすとき,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\theta = ab\cos\theta$$

  交換法則

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$$

  分配法則

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$$

$$\begin{aligned}(m\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} &= m(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (m\boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}) &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} &= |\boldsymbol{a}|^2 = a^2\end{aligned}$$

  $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ なるベクトルにおいて

  平行のとき

  $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ のとき, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$

  基本ベクトル $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ において

  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$

  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$

  内積の成分表示

  $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ とすると,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_x\mathbf{j} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{j} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z\end{aligned}$$

  Schwarz の不等式 $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$

  三角不等式 $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$

- 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

  外積, ベクトル積, クロス積と呼ばれる.

  2つのベクトルから新しいベクトルを作る.

  大きさ: $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = ab\sin\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$

  方向: $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{b}$ に重なる向き $(\theta \leq \pi)$ に右ねじを回転したとき, その右ねじが進む方向

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \\ (m\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} &= m(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (m\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

  $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ または $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内, 少なくとも1つが $\boldsymbol{0}$ のとき, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

  基本ベクトル $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ において

  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$

  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}$

  $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}$

  $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}$

  外積の成分表示

  $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ とすると,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_x\mathbf{j} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \times (b_x\mathbf{j} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) \\ &= (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} \\ &\quad +(a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

  使用例

  - モーメント
  - 回転運動

    回転角: 大きさ

    回転軸: 向き
  - ローレンツ力

    $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$

    $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}$

- 3 つのベクトルの積

  スカラー三重積

  $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=[\boldsymbol{abc}]$

  (グラスマンの記号)

  $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を三辺とする平行六面体の体積

  ベクトル三重積

  $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$

  $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$
  $\neq\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

  $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=[\boldsymbol{abc}]\boldsymbol{b}$

# 1 ドリル

pp. 35–38

# 2 授業レポート

## 2.1 ベクトル $\boldsymbol{u}=(2,1,-1)$, $\boldsymbol{v}=(1,-1,1)$ の両者に垂直でかつ, 大きさが $1$ のベクトルを求めよ.

## 2.2 (問 2)$\boldsymbol{a}=(2,k,1)$ の $\boldsymbol{b}=(3,-2,4)$ への正射影の大きさを求めよ．さらに, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが垂直となるように $k$ の値を定めよ.

## 2.3 ベクトル $\boldsymbol{P}=(\cos\theta,\sin\theta,0),\boldsymbol{Q}=(\cos\phi,-\sin\phi,0),\boldsymbol{R}=(\cos\phi,\sin\phi,0)$ を用いて, 加法定理 $(\sin(\theta\pm\phi),\cos(\theta\pm\phi))$ を示せ.

## 2.4 図の $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ を用いて, 正弦定理を示せ.

## 2.5 スカラー三重積を示せ

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

## 2.6 ベクトル三重積を示せ

**(a)** $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$

**(b)** $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=[\boldsymbol{abc}]\boldsymbol{b}$