2回目授業レジュメ

電気工学科 講師 南政孝
http://www.kobe-kosen.ac.jp/˜minami/

平成 26 年 4 月 21 日 (月)

本日の内容

1. ベクトル解析

1.1 ベクトル関数

1.1.1 序論

- 科学・工学で取り扱う量

  スカラー量, ベクトル量

- 歴史的側面

  流体力学や電磁気学が発展する過程でベクトル解析が必要とされ, 確立した数学技法

- 定義

  大きさに比例した真っすぐな 1 本の矢で表す. 矢印の方向でベクトルの向きを示す.

  1 つのベクトルを決定するのは矢の長さと方向である.

  ベクトルは座標系によらない幾何学量として取り扱われる.

  平行移動で重ねられると同じベクトル

  ベクトルの和 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ は, ベクトル $\boldsymbol{A}$ の終点にベクトル $\boldsymbol{B}$ の始点が一致するように平行移動し, $\boldsymbol{A}$ の始点から $\boldsymbol{B}$ の終点に引いた矢によって定義される. この手続きは, 和に関する三角形の法則

  交換法則

  $$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$

  結合法則

  $$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$

  $$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$$

  大きさ 0 のベクトルを零ベクトル $\mathbf{0}$ という.

- ベクトルの成分表示

  ベクトル $\boldsymbol{a}$ の始点に原点があるような直角座標系を導入したとき, 終点の座標が (a_x, a_y, a_z) であったとする. ここで, x, y, z 軸の正方向を向く単位ベクトルを $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ とすると, 和の定義より,

  $$\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$$

  a_x, a_y, a_z をベクトル $\boldsymbol{a}$ の x 成分, y 成分, z 成分

  ベクトルの成分表示: $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$

  ベクトルの大きさ (絶対値): $a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

  成分によるベクトルの和,

  $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ とすると,

  $$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

  ベクトルのスカラー倍

  $m\boldsymbol{a}$ はその絶対値が $|\boldsymbol{a}|$ の m 倍となるので

  $$m\boldsymbol{a} = (ma_x, ma_y, ma_z)$$

  全ての成分を m 倍する.

  $$\begin{aligned} m(n\boldsymbol{A}) &= mn\boldsymbol{A} \\ (m+n)\boldsymbol{A} &= m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{A} \\ m(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{B} \\ 0\boldsymbol{A} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

  直角座標系内の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ に対して, 原点 O から引いたベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を点 P の位置ベクトルと言い, 通常 $\boldsymbol{r}$ で表される.

  $$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{r} = (x, y, z)$$

  ベクトル $\boldsymbol{r}$ と各座標軸となす角を α, β, γ とすると, $x = r\cos\alpha$, $y = r\cos\beta$, $z = r\cos\gamma$ となる. この $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ を方向余弦という.

1　ドリル

p. 31–34

2　授業レポート

2.1　大きさが 9 のベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ が各直角座標軸となす角が全て等しいとき，A_x，A_y，A_z を求めよ．ただし，$A_x > 0$，$A_y > 0$，$A_z > 0$ とする．

2.2　三角形の頂点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ の座標はそれぞれ $(-1, 0, 2)$，$(0, 1, 0)$，$(1, -1, 0)$ であるとする．図形 ABCD が平行四辺形となるような D の座標を求めよ．

2.3　中心が $\boldsymbol{r}_1$ である半径 a の球がある．$\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ とする．

(a) この球の代数方程式を求めよ．

(b) この球を表すベクトル方程式を求めよ．

2.4　ベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} \neq 0)$ と向きが等しい単位ベクトルを求めよ．