変位出力を用いた四次のプロパーな局所コントローラによる大型柔軟宇宙構造物の分散ロバスト最適制御

小林　洋二*

Decentralized Robust Optimal Control for Large Flexible Space Structures by Fourth Order Local Proper Controllers Using Displacement Output

Yohji KOBAYASHI*

ABSTRACT

This paper considers position and attitude control of large flexible space structures composed of a number of subsystems(substructures) which are interconnected by flexible links modeled by springs and dampers. It is assumed that sensors and actuators are collocated in each subsystem. The purpose of the paper is to propose a decentralized control method by fourth order local proper controllers using displacement/angle output, which makes both each closed-loop subsystem and an overall closed-loop system not only robustly stable against uncertainty of characteristic parameters such as mass, damping, and stiffness, but also optimal for quadratic cost functions. By choosing parameters of each local proper controller as it becomes a phase lead compensator, the closed-loop subsystems and the overall closed-loop system become robustly stable. Furthermore, it is shown the closed-loop subsystems and the overall closed-loop system become optimal for quadratic cost functions by making two feedback gains large in each local proper controller.

Keywords : large flexible space structure, decentralized control, optimal control, robust stabilization, displacement output

1.　はじめに

宇宙太陽光発電衛星[(1),(2)]のような宇宙構造物は大型であるため，一度に宇宙へ打ち上げることができず，サブシステム（サブ構造物）に分けて打ち上げられ，宇宙で組み立てられる．このような大型構造物の位置と姿勢を制御する際には，サブシステムごとに制御を行う分散制御を適用することが合理的である．一方，打ち上げコスト削減のために宇宙構造物は軽量化され，多数の振動モードをもつ柔軟な構造物になる．さらに，構造物は柔軟であるため，地上では自重を支えることができず，地上実験によって構造物の正確な特性パラメータを得ることが困難になる．これらのことから，制御則には制振性能と構造物の特性パラメータの不確かさに対して閉ループシステムをロバスト安定化する性能が求められる．

このような構造物の位置と姿勢を制御する手法として，センサとアクチュエータを同位置・同方向に配置するコロケーションのもとで，構造物の減衰特性を改善するために速度／角速度出力（以下では速度出力という）の静的フィードバックを行うDirect Velocity Feedback(DVFB)[(3)]が提案され，この手法についてのロバスト安定性を評価した結果も報告されている[(4),(5)]．さらに，宇宙構造物の剛体モードを制御するために，変位／角変位出力（以下では変位出力という）と速度出力の静的フィードバックを行うDirect Velocity and Displacement Feedback(DVDFB)[(6)]が提案されている．DVDFBは閉ループシステムをロバスト安定化し，二次形式評価関数に対して最適化できるなど優れた制御性能をもっている．しかしながら，DVDFBを実装するためには，変位センサに加えて速度センサが必要となり，このことはコストと信頼性の面から望ましくない．この問題を解決するために，変位出力のみを用いたプロパーなコントローラを用いるDynamic Displacement Feedback(DDFB)[(7)]が提案され，この手法によってもDVDFBと同様に，閉ループシステムをロバスト安定化[(7)]，最適化[(8)]できることが報告されている．さらに，DDFBと同じ変位出力のみを用いたプロパーなコントローラが，構造物の振動モードに対する位相進み補償器になるようにそのパラメータを決定してロバスト安定化を実現する方法[(9)]や二次のプロパーなコントローラのパラメータをチューニングすることによって，

*機械工学科 教授

閉ループシステムをロバスト安定化し，同時に，ある二次形式評価関数に対する最適レギュレータにする方法が提案された[10]．しかしながら，柔軟構造物は多数の振動モードをもち，その制振を図るためには，抑制するべき振動モードの数に応じて，コントローラの次数を大きくすることが望まれる．本論文では，文献[10]の局所コントローラを四次に拡張して構造物を分散制御した場合においても，閉ループサブシステムと閉ループ全体システムの両者をロバスト安定化し，かつ最適制御できることを示す．そして，そのために局所コントローラのパラメータが満たすべき条件を明らかにする．

2. 制御対象の記述

ここでは ℓ 個のサブシステムからなる大型柔軟宇宙構造物を考える．厳密に言えば，柔軟宇宙構造物の運動は無限次元の分布定数系で表される[11]．しかしながら，構造物を分布定数系として表した場合，コントローラの設計が困難になるため，本稿では，集中定数系として近似し，第 i 番目のサブシステムの運動をつぎの二階線形微分方程式で表す．

$$M_i\ddot{q}_i(t)+D_i\dot{q}_i(t)+K_iq_i(t)=L_iu_i(t) \tag{1}$$
$$y_i(t)=L_i^Tq_i(t) \tag{2}$$

ただし，$q_i(t)\in\Re^{n_i}$，$u_i(t)\in\Re^{r_i}$，$y_i(t)\in\Re^{r_i}$ は，それぞれ変位, 操作入力，および検出出力を表すベクトルである．M_i，D_i，$K_i\in\Re^{n_i\times n_i}$ は質量，減衰，剛性を表す行列であり，M_i は正定，D_i，K_iは半正定である．$L_i\in\Re^{n_i\times r_i}$ は入力の伝わり方を表す列フルランクの行列，L_i^T は出力の検出のされ方を表す行列である．この L_iとL_i^T の転置の関係はセンサとアクチュエータがコロケーションされていることを表す．なお，各サブシステムにおいて剛体モードは可制御かつ可観測であると仮定する．この仮定は，次式で表される．

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} D_i & L_i\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} K_i & L_i\end{bmatrix}=n_i \tag{3}$$

3. プロパーな局所コントローラによる閉ループサブシステムのロバスト安定化

第 i サブシステムのアクチュエータの入力端に次式の高域遮断フィルターをおく．

$$u_i(s)=\frac{(s+z_{i_1})(s+z_{i_2})(s+z_{i_3})}{s(s+p_{i_1})(s+p_{i_2})(s+p_{i_3})}v_i(s) \tag{4}$$

ここで，z_{i_1}，z_{i_2}，z_{i_3}，p_{i_1}，p_{i_2}，p_{i_3} は不等式$z_{i_1}<z_{i_2}<z_{i_3}$，$p_{i_1}<p_{i_2}<p_{i_3}$ を満たす正のスカラであり，$v_i(s)$ は仮想的に次式で表されるフィードバックである．

$$v_i(s)=-\gamma_i\{\alpha_iR_iy_i(s)+\beta_iR_isy_i(s)+u_i(s)\} \tag{5}$$

ただし，α_i，β_i，γ_i は正のスカラ，$R_i\in\Re^{r_i\times r_i}$ は任意の正定行列である．(5)式を(4)式に代入することにより，次式の局所コントローラが得られる．

$$u_i(s)=-\frac{n_i(s)}{d_i(s)}R_iy_i(s) \tag{6}$$
$$n_i(s)=\gamma_i\beta_i\left(s+\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)(s+z_{i_1})(s+z_{i_2})(s+z_{i_3})$$
$$d_i(s)=s^4+d_{i_3}s^3+d_{i_2}s^2+d_{i_1}s+d_{i_0}$$
$$d_{i_3}=p_{i_1}+p_{i_2}+p_{i_3}+\gamma_i$$
$$d_{i_2}=p_{i_1}p_{i_2}+p_{i_2}p_{i_3}+p_{i_3}p_{i_1}+\gamma_i(z_{i_1}+z_{i_2}+z_{i_3})$$
$$d_{i_1}=p_{i_1}p_{i_2}p_{i_3}+\gamma_i(z_{i_1}z_{i_2}+z_{i_2}z_{i_3}+z_{i_3}z_{i_1})$$
$$d_{i_0}=\gamma_iz_{i_1}z_{i_2}z_{i_3}$$

この式は，四次のプロパーな局所コントローラに変位出力$y_i(s)$ を入力することによって，操作入力$u_i(s)$ が得られることを表す．(6)式の右辺の特性方程式が実数解$-\tilde{p}_{i_1}$，$-\tilde{p}_{i_2}$，$-\tilde{p}_{i_3}$，$-\tilde{p}_{i_4}$ $(\tilde{p}_{i_1}<\tilde{p}_{i_2}<\tilde{p}_{i_3}<\tilde{p}_{i_4})$ をもつようにz_{i_j}，p_{i_j}，γ_i $(j=1,2,3)$ を選ぶと，(6)式の$d_i(s)$は次式で表される．

$$d_i(s)=(s+\tilde{p}_{i_1})(s+\tilde{p}_{i_2})(s+\tilde{p}_{i_3})(s+\tilde{p}_{i_4}) \tag{7}$$

ここで，(6)式の右辺において $y_i(s)$ を除いた局所コントローラの分子多項式から$-\gamma_i\beta_i\left(s+\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)$ の項を取り除いた伝達関数

$$\frac{(s+z_{i_1})(s+z_{i_2})(s+z_{i_3})}{(s+\tilde{p}_{i_1})(s+\tilde{p}_{i_2})(s+\tilde{p}_{i_3})(s+\tilde{p}_{i_4})} \tag{8}$$

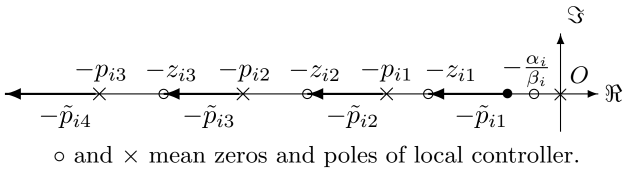
において，γ_i を大きくしたときの根軌跡[12]を調べると，

$$\tilde{p}_{i_1}<z_{i_1}<\tilde{p}_{i_2}<z_{i_2}<\tilde{p}_{i_3}<z_{i_3}<\tilde{p}_{i_4} \tag{9}$$

が成り立つ．さらに，α_iに対してβ_iを十分に大きく選ぶと，局所コントローラの極と零点は 図 1 に示すような大小関係になる．このとき，$0<\gamma_i<\infty$ に対して，

$$\frac{\alpha_i}{\beta_i}<\tilde{p}_{i_1}<z_{i_1}<\tilde{p}_{i_2}<z_{i_2}<\tilde{p}_{i_3}<z_{i_3}<\tilde{p}_{i_4} \tag{10}$$

が成り立ち，局所コントローラは位相進み補償器になり，閉ループサブシステムは，構造物の特性パラメータの不確かさに対してロバスト安定化される[9]．



○ and × mean zeros and poles of local controller.
Bold lines mean existence intervals of poles.

図1 Loci of poles $\tilde{p}_{i1},\tilde{p}_{i2},\tilde{p}_{i3},\tilde{p}_{i4}$ as a function of γ_i

4. 閉ループサブシステムの最適制御

(4) 式の高域遮断フィルタの実現の一つは次式になる．

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_{i_1}(t) \\ \dot{\zeta}_{i_2}(t) \\ \dot{\zeta}_{i_3}(t) \\ \dot{\zeta}_{i_4}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{r_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{r_i} \\ 0 & -a_{i_1}I_{r_i} & -a_{i_2}I_{r_i} & -a_{i_3}I_{r_i} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \zeta_{i_1}(t) \\ \zeta_{i_2}(t) \\ \zeta_{i_3}(t) \\ \zeta_{i_4}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{r_i} \end{bmatrix} v_i(t) \tag{11}$$

$$u_i(t) = \begin{bmatrix} c_{i_0}I_{r_i} & c_{i_1}I_{r_i} & c_{i_2}I_{r_i} & I_{r_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{i_1}(t) \\ \zeta_{i_2}(t) \\ \zeta_{i_3}(t) \\ \zeta_{i_4}(t) \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$a_{i_1} = p_{i_1}p_{i_2}p_{i_3},\ a_{i_2} = p_{i_1}p_{i_2} + p_{i_2}p_{i_3} + p_{i_3}p_{i_1}$$
$$a_{i_3} = p_{i_1} + p_{i_2} + p_{i_3},\ c_{i_0} = z_{i_1}z_{i_2}z_{i_3}$$
$$c_{i_1} = z_{i_1}z_{i_2} + z_{i_2}z_{i_3} + z_{i_3}z_{i_1},\ c_{i_2} = z_{i_1} + z_{i_2} + z_{i_3}$$
$$\zeta_{i_j}(t) = \begin{bmatrix} \zeta_{i_{j1}}(t) & \zeta_{i_{j2}}(t) & \cdots & \zeta_{i_{jr_i}}(t) \end{bmatrix}^T,\ j = 1, \ldots, 4$$
$$v_i(t) = \begin{bmatrix} v_{i_1}(t) & v_{i_2}(t) & \cdots & v_{i_{r_i}}(t) \end{bmatrix}^T$$
$$u_i(t) = \begin{bmatrix} u_{i_1}(t) & u_{i_2}(t) & \cdots & u_{i_{r_i}}(t) \end{bmatrix}^T$$

ここで，$I_{r_i} \in \Re^{r_i \times r_i}$ は r_i 次の単位行列を表す．

(1), (2) 式の第iサブシステムと(11), (12) 式のフィルタからなる拡大系は次式で表される．

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i v_i(t) \tag{13}$$
$$x_i(t) = \begin{bmatrix} q_i^T(t) & \dot{q}_i^T(t) & \zeta_{i_1}^T(t) & \zeta_{i_2}^T(t) & \zeta_{i_3}^T(t) & \zeta_{i_4}^T(t) \end{bmatrix}^T$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -M_i^{-1}K_i & -M_i^{-1}D_i & c_{i_0}M_i^{-1}L_i & c_{i_1}M_i^{-1}L_i & c_{i_2}M_i^{-1}L_i & M_i^{-1}L_i \\ 0 & 0 & 0 & I_{r_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r_i} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{i_1}I_{r_i} & -a_{i_2}I_{r_i} & -a_{i_3}I_{r_i} \end{bmatrix},\ B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{r_i} \end{bmatrix}$$

ただし，$I_{n_i} \in \Re^{n_i \times n_i}$ は n_i 次の単位行列を表す．

このとき，つぎの定理が成り立つ．

定理１ (13) 式の拡大系に(5)式のフィードバックを施した閉ループサブシステムは，つぎの二次形式評価関数J_i を最小にする最適レギュレータになる．

$$J_i = \int_0^\infty \left(x_i^T(t)\,\tilde{Q}_i\,x_i(t) + v_i^T(t)\tilde{R}_i v_i(t) \right) dt \tag{14}$$

ここで，$\tilde{Q}_i$, $\tilde{R}_i$ は次式で与えられる．

$$\tilde{Q}_i = T_i^T Q_i T_i \tag{15}$$

$$T_i = \begin{bmatrix} \gamma_i I_{n_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_i I_{n_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_i I_{r_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_i I_{r_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_i I_{r_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r_i} \end{bmatrix}$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} Q_{i_{11}} & 0 & 0 & Q_{i_{14}} & Q_{i_{15}} & Q_{i_{16}} \\ 0 & Q_{i_{22}} & 0 & Q_{i_{24}} & Q_{i_{25}} & Q_{i_{26}} \\ 0 & 0 & Q_{i_{33}} & Q_{i_{34}} & Q_{i_{35}} & Q_{i_{36}} \\ Q_{i_{14}}^T & Q_{i_{24}}^T & Q_{i_{34}}^T & Q_{i_{44}} & Q_{i_{45}} & Q_{i_{46}} \\ Q_{i_{15}}^T & Q_{i_{25}}^T & Q_{i_{35}}^T & Q_{i_{45}}^T & Q_{i_{55}} & Q_{i_{56}} \\ Q_{i_{16}}^T & Q_{i_{26}}^T & Q_{i_{36}}^T & Q_{i_{46}}^T & Q_{i_{56}}^T & Q_{i_{66}} \end{bmatrix}$$

$$Q_{i_{11}} = 2\alpha_i K_i + \alpha_i^2 L_i R_i L_i^T$$
$$Q_{i_{14}} = \frac{1}{\gamma_i}\alpha_i a_{i_1} L_i,\ Q_{i_{15}} = \frac{1}{\gamma_i}\alpha_i a_{i_2} L_i$$
$$Q_{i_{16}} = \left(\alpha_i a_{i_3} I_{n_i} + \beta_i K_i M_i^{-1}\right) L_i$$
$$Q_{i_{22}} = 2\left(\beta_i D_i - \alpha_i M_i\right) + \beta_i^2 L_i R_i L_i^T$$
$$Q_{i_{24}} = \frac{1}{\gamma_i}\beta_i a_{i_1} L_i,\ Q_{i_{25}} = \frac{1}{\gamma_i}\beta_i a_{i_2} L_i$$
$$Q_{i_{26}} = \{\left(\beta_i a_{i_3} - \alpha_i\right) I_{n_i} + \beta_i D_i M_i^{-1}\} L_i$$
$$Q_{i_{33}} = c_{i_0}^2 \tilde{R}_i$$
$$Q_{i_{34}} = \frac{2}{\gamma_i} c_{i_1} a_{i_1} \tilde{R}_i + \left(c_{i_1}^2 - 2c_{i_0}c_{i_2}\right)\tilde{R}_i$$
$$Q_{i_{35}} = \frac{1}{\gamma_i}\left(c_{i_2}a_{i_1} + c_{i_1}a_{i_2}\right)\tilde{R}_i$$
$$Q_{i_{36}} = \left(a_{i_1} + c_{i_1}a_{i_3} - c_{i_0}\right)\tilde{R}_i - \beta_i c_{i_1} L_i^T M_i^{-1} L_i$$
$$Q_{i_{44}} = \frac{2}{\gamma_i} c_{i_1} a_{i_1} \tilde{R}_i + \left(c_{i_1}^2 - 2c_{i_0}c_{i_2}\right)\tilde{R}_i$$
$$Q_{i_{45}} = \frac{1}{\gamma_i}\left(c_{i_2}a_{i_1} + c_{i_1}a_{i_2}\right)\tilde{R}_i$$
$$Q_{i_{46}} = \left(a_{i_1} + c_{i_1}a_{i_3} - c_{i_0}\right)\tilde{R}_i - \beta_i c_{i_1} L_i^T M_i^{-1} L_i$$
$$Q_{i_{55}} = \left(\frac{2}{\gamma_i} c_{i_2} a_{i_2} + c_{i_2}^2 - 2c_{i_1}\right)\tilde{R}_i$$
$$Q_{i_{56}} = \left(a_{i_2} + c_{i_2}a_{i_3} - c_{i_1}\right)\tilde{R}_i - \beta_i c_{i_2} L_i^T M_i^{-1} L_i$$
$$Q_{i_{66}} = \{\gamma_i^2 + 2\gamma_i\left(a_{i_3} - c_{i_2}\right)\}\tilde{R}_i - 2\gamma_i\beta_i L_i^T M_i^{-1} L_i$$

$$\tilde{R}_i = R_i^{-1} \tag{16}$$

なお，(5)式のフィードバックにおいてα_i，β_i，γ_i，R_i は，(15)式の$\tilde{Q}_i$ とつぎの行列$\tilde{P}_i$ を正定にするように

選ばれるものとする．

$$\tilde{P}_i = T_i^T P_i T_i \tag{17}$$

$$P_i = \begin{bmatrix} \alpha_i D_i + \beta_i K_i + \alpha_i\beta_i L_i \tilde{R}_i^{-1} L_i^T & \alpha_i M_i & 0 & 0 & 0 & \alpha_i L_i \\ \alpha_i M_i & \beta_i M_i & 0 & 0 & 0 & \beta_i L_i \\ 0 & 0 & c_{i_0}c_{i_1}\tilde{R}_i & c_{i_0}c_{i_2}\tilde{R}_i & c_{i_0}\tilde{R}_i & c_{i_0}\tilde{R}_i \\ 0 & 0 & c_{i_0}c_{i_2}\tilde{R}_i & (c_{i_1}c_{i_2}-c_{i_0})\tilde{R}_i & c_{i_1}\tilde{R}_i & c_{i_1}\tilde{R}_i \\ 0 & 0 & c_{i_0}\tilde{R}_i & c_{i_1}\tilde{R}_i & c_{i_2}\tilde{R}_i & c_{i_2}\tilde{R}_i \\ \alpha_i L_i^T & \beta_i L_i^T & c_{i_0}\tilde{R}_i & c_{i_1}\tilde{R}_i & c_{i_2}\tilde{R}_i & \gamma_i\tilde{R}_i \end{bmatrix} \tag{18}$$

(証明) (1), (2)式で表されるサブ構造物の不安定極は，$s=0$の剛体モードのみであり，(3) 式の条件からサブ構造物は可安定である．さらに，サブ構造物の入力端に置かれた高域遮断フィルタは原点$s=0$に零点をもたないため，構造物とフィルタの間で不安定極の極零相殺は生じない．したがって，拡大系(13) は可安定である．

(A_i, B_i) が可安定対であれば，正定行列$\tilde{Q}_i$，$\tilde{R}_i$ に対してRiccati方程式は

$$\tilde{P}_i A_i + A_i^T \tilde{P}_i - \tilde{P}_i B_i \tilde{R}_i^{-1} B_i^T \tilde{P}_i = -\tilde{Q}_i \tag{19}$$

となる．この方程式の解$\tilde{P}$ は定理の条件より正定であるから，$\tilde{P}_i$ は(19)式のRiccati方程式の唯一正定解になることがわかる．この$\tilde{P}_i$ を用いたフィードバック $v_i(t) = -\tilde{R}_i^{-1}B_i^T\tilde{P}_i x_i(t)$ は，(13)式の拡大系を安定化し，閉ループ全体システムは(14)式の二次形式評価関数を最小にする最適レギュレータになる．一方，(18)式の$\tilde{P}_i$ を用いてこの$v_i(t)$ を計算すると

$$\begin{aligned} v_i(t) &= -\tilde{R}_i^{-1}B_i^T\tilde{P}_i x_i(t) \\ &= -\gamma_i\{\alpha_i R_i y_i(t) + \beta_i R_i \dot{y}_i(t) + u_i(t)\} \end{aligned} \tag{20}$$

となり，これは(5)式のフィードバックと一致する．したがって，(13) 式の拡大系に(5)式のフィードバックを施した閉ループサブシステムは，(14)式のJ_i を最小にする最適レギュレータになる．　**(証明終わり)**

なお，α_iに対してβ_i を十分大きく選び，さらに，十分大きいγ_iを選ぶことにより，$\tilde{Q}_i$ と$\tilde{P}_i$ は正定になり，定理 **1**の条件が満たされ，閉ループサブシステムは最適レギュレータになる．このとき，局所コントローラの極と零点は図 1 に示されるような大小関係にあるため，(10) 式の不等式の関係は維持され，閉ループサブシステムはロバスト安定化されている．

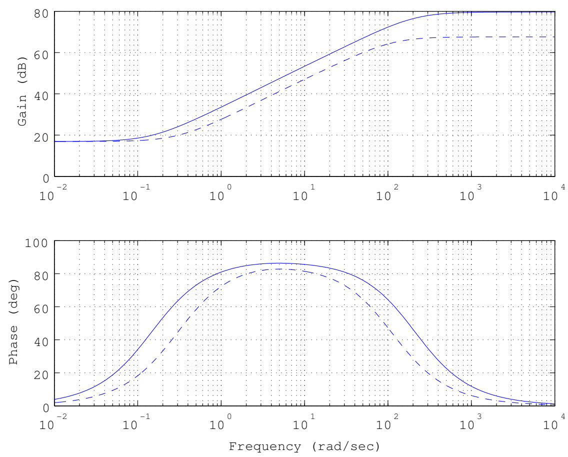


図2 Schematic Bode diagrams of local proper controller

（注意 1）定理 **1** の条件を満たす局所コントローラとそれを満たさない局所コントローラのゲイン線図と位相線図の概念図を図2 [(10)] に示す．上がゲイン線図，下が位相線図を表し，いずれの図においても実線が条件を満たす場合の，破線が満たさない場合の曲線を表している．この図において，β_i を大きくすると，α_i/β_i の値が小さくなり位相進み補償を行う低周波帯域が，より左側へ延びる．一方，γ_i を大きくすると，位相進み補償を行う高周波帯域が，より右側へ延びる．また，ゲインは，β_i, γ_i のいずれを大きくしても高周波域のゲインが大きくなる．文献[(10)] と本論文で提案する手法では，β_i, γ_i を大きくすることによって，局所コントローラのゲインを大きくし，位相進み補償の周波数帯を広げることによって，閉ループシステムの最適性を実現している．

5.　閉ループ全体システム

他のサブシステムとの結合項をもつ第iサブシステムは，次式で表される．

$$\begin{aligned} &M_i\ddot{q}_i(t) + D_i\dot{q}_i(t) + K_i q_i(t) \\ &= L_i u_i(t) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{\ell} N_{ij}\big[K_{Cij}\left(N_{ji}^T q_j(t) - N_{ij}^T q_i(t)\right) \\ &\qquad + D_{Cij}\left(N_{ji}^T\dot{q}_j(t) - N_{ij}^T\dot{q}_i(t)\right)\big] \end{aligned} \tag{21}$$

ここで，右辺第二項は他のサブシステムとの結合項を表し，N_{ij} は第iサブシステムと第jサブシステムの結合に用いられる柔軟なリンクの配置と方向を表す行列である．柔軟なリンクの特性はバネとダンパで近似され，それぞれのパラメータをK_{Cij} とD_{Cij} で表し，これらはいずれも正定行列であるとする．(21)式の右辺にある次式の項は，第iサブシステムが，柔軟なリンクを介して第jサブシステムから受ける力／トルクを

表す．

$$K_{Cij}\left(N_{ji}^T q_j(t)-N_{ij}^T q_i(t)\right)+D_{Cij}\left(N_{ji}^T \dot{q}_j(t)-N_{ij}^T \dot{q}_i(t)\right)$$

なお，$N_{ij}^T q_i(t)$ は，第iサブシステムの結合点における変位を表し，第i，第j サブシステムにおいて，変位／角変位が原点，すなわち$q_i(t)=0$，$q_j(t)=0$ で静止しているとき柔軟なリンクは伸縮せず，結合点に作用する力／トルクはゼロであるとする．これらの力／トルクは，第i，第j サブシステムの間で作用・反作用の関係にあり，$K_{Cij}=K_{Cji}$, $D_{Cij}=D_{Cji}$ が成り立つ．

閉ループサブシステムを柔軟なリンクで柔結合して得られる閉ループ全体システムは，(13)式の拡大系を(21)式の右辺第二項の結合項によって柔結合し，各サブシステムに(20)式のフィードバックを施すことによって得られる閉ループシステムと等価である．以下では，変位，操作入力，検出出力，フィルタの状態のベクトルを統合して$\bar{q}(t)$, $\bar{u}(t)$, $\bar{y}(t)$, $\bar{\zeta}_j(t)(j=1,2,3,4)$で表し，すべてのサブ構造物とフィルタからなる全体の拡大系と各サブシステムに施されるフィードバックを記述する．

まず，サブ構造物を柔軟なリンクで結合して得られる全体の構造物は，次式で表される．

$$\bar{M}\ddot{\bar{q}}(t)+\bar{D}\dot{\bar{q}}(t)+\bar{K}\bar{q}(t)=\bar{L}\bar{u}(t) \tag{22}$$
$$\bar{y}(t)=\bar{L}^T\bar{q}(t) \tag{23}$$

ここで，ベクトルと行列はつぎの通りである．

$$\bar{q}(t)=\left[\begin{array}{cccc} q_1^T(t) & q_2^T(t) & \cdots & q_\ell^T(t)\end{array}\right]^T$$
$$\bar{u}(t)=\left[\begin{array}{cccc} u_1^T(t) & u_2^T(t) & \cdots & u_\ell^T(t)\end{array}\right]^T$$
$$\bar{y}(t)=\left[\begin{array}{cccc} y_1^T(t) & y_2^T(t) & \cdots & y_\ell^T(t)\end{array}\right]^T$$
$$\bar{M}=\mathrm{diag}\{M_i\}_{i=1,2\ldots,\ell},\ \bar{L}=\mathrm{diag}\{L_i\}_{i=1,2\ldots,\ell}$$
$$\bar{D}=\mathrm{diag}\{D_i\}_{i=1,2,\ldots,\ell}+\sum_{i=1}^{\ell-1}\sum_{j=i+1}^{\ell}\bar{N}_{ij}D_{Cij}\bar{N}_{ij}^T$$
$$\bar{K}=\mathrm{diag}\{K_i\}_{i=1,2,\ldots,\ell}+\sum_{i=1}^{\ell-1}\sum_{j=i+1}^{\ell}\bar{N}_{ij}K_{Cij}\bar{N}_{ij}^T$$

ただし，$\bar{N}_{ij}$は以下のようにN_{ij}，$-N_{ji}$ 以外のブロック行列の要素がすべてゼロである行列を表す．

$$\bar{N}_{ij}=\left[\begin{array}{ccccc} \cdots & N_{ij}^T & \cdots & -N_{ji}^T & \cdots\end{array}\right]$$

iブロック　jブロック

つぎにすべてのサブシステムの高域遮断フィルタは，

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{\zeta}}_1(t)\\ \dot{\bar{\zeta}}_2(t)\\ \dot{\bar{\zeta}}_3(t)\\ \dot{\bar{\zeta}}_4(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I_{\bar{r}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_{\bar{r}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & I_{\bar{r}}\\ 0 & -\bar{\mathcal{A}}_1 & -\bar{\mathcal{A}}_1 & -\bar{\mathcal{A}}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\zeta}_1(t)\\ \bar{\zeta}_2(t)\\ \bar{\zeta}_3(t)\\ \bar{\zeta}_4(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\I_{\bar{r}}\end{bmatrix}\bar{v}(t) \tag{24}$$

$$\bar{u}(t)=\left[\begin{array}{cccc}\bar{\mathcal{C}}_0 & \bar{\mathcal{C}}_1 & \bar{\mathcal{C}}_2 & I_{\bar{r}}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\bar{\zeta}_1(t)\\ \bar{\zeta}_2(t)\\ \bar{\zeta}_3(t)\\ \bar{\zeta}_4(t)\end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\bar{\zeta}_1(t)=\left[\begin{array}{cccc}\zeta_{11}^T(t) & \zeta_{21}^T(t) & \cdots & \zeta_{\ell 1}^T(t)\end{array}\right]^T$$
$$\bar{\zeta}_2(t)=\left[\begin{array}{cccc}\zeta_{12}^T(t) & \zeta_{22}^T(t) & \cdots & \zeta_{\ell 2}^T(t)\end{array}\right]^T$$
$$\bar{\zeta}_3(t)=\left[\begin{array}{cccc}\zeta_{13}^T(t) & \zeta_{23}^T(t) & \cdots & \zeta_{\ell 3}^T(t)\end{array}\right]^T$$
$$\bar{\zeta}_4(t)=\left[\begin{array}{cccc}\zeta_{14}^T(t) & \zeta_{24}^T(t) & \cdots & \zeta_{\ell 4}^T(t)\end{array}\right]^T$$
$$\bar{v}(t)=\left[\begin{array}{cccc}v_1^T(t) & v_2^T(t) & \cdots & v_\ell^T(t)\end{array}\right]^T,\ \bar{r}=\sum_{i=1}^{\ell}r_i$$
$$\bar{\mathcal{A}}_1=\mathrm{diag}\{a_{i_1}I_{r_i}\}_{i=1,2\ldots,\ell},\ \bar{\mathcal{A}}_2=\mathrm{diag}\{a_{i_2}I_{r_i}\}_{i=1,2\ldots,\ell}$$
$$\bar{\mathcal{A}}_3=\mathrm{diag}\{a_{i_3}I_{r_i}\}_{i=1,2\ldots,\ell},\ \bar{\mathcal{C}}_0=\mathrm{diag}\{c_{i_0}I_{r_i}\}_{i=1,2\ldots,\ell}$$
$$\bar{\mathcal{C}}_1=\mathrm{diag}\{c_{i_1}I_{r_i}\}_{i=1,2\ldots,\ell},\ \bar{\mathcal{C}}_2=\mathrm{diag}\{c_{i_2}I_{r_i}\}_{i=1,2\ldots,\ell}$$

となる．ここで，$I_{\bar{r}}\in\Re^{\bar{r}\times\bar{r}}$ は $\bar{r}$ 次の単位行列を表す．

(22), (23) 式の柔結合された全体の構造物と(24), (25)式のフィルタからなる拡大系は次式で表される．

$$\dot{\bar{x}}(t)=\bar{A}\bar{x}(t)+\bar{B}\bar{v}(t) \tag{26}$$
$$\bar{x}(t)=\left[\begin{array}{cccccc}\bar{q}^T(t) & \dot{\bar{q}}^T(t) & \bar{\zeta}_1^T(t) & \bar{\zeta}_2^T(t) & \bar{\zeta}_3^T(t) & \bar{\zeta}_4^T(t)\end{array}\right]$$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}0 & I_{\bar{n}} & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\bar{M}^{-1}\bar{K} & -\bar{M}^{-1}\bar{D} & \bar{M}^{-1}\bar{L}\bar{\mathcal{C}}_0 & \bar{M}^{-1}\bar{L}\bar{\mathcal{C}}_1 & \bar{M}^{-1}\bar{L}\bar{\mathcal{C}}_2 & \bar{M}^{-1}\bar{L}\\ 0 & 0 & 0 & I_{\bar{r}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{\bar{r}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{\bar{r}}\\ 0 & 0 & 0 & -\bar{\mathcal{A}}_1 & -\bar{\mathcal{A}}_2 & -\bar{\mathcal{A}}_3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\I_{\bar{r}}\end{bmatrix}$$

$$\bar{n}=\sum_{i=1}^{\ell}n_i$$

ここで，$I_{\bar{n}}\in\Re^{\bar{n}\times\bar{n}}$ は $\bar{n}$ 次の単位行列を表す．

さらに，各サブシステムに施されるフィードバックは次式で表される．

$$\bar{v}(t) = -\bar{\gamma}\{\bar{\alpha}\hat{R}\bar{y}(t) + \bar{\beta}\hat{R}\dot{\bar{y}}(t) + \bar{u}(t)\} \tag{27}$$
$$\bar{\alpha} = \mathrm{diag}\{\alpha_i I_{r_i}\}_{i=1,2\ldots,\ell},\ \bar{\beta} = \mathrm{diag}\{\beta_i I_{r_i}\}_{i=1,2\ldots,\ell}$$
$$\bar{\gamma} = \mathrm{diag}\{\gamma_i I_{r_i}\}_{i=1,2\ldots,\ell},\ \hat{R} = \mathrm{diag}\{R_i\}_{i=1,2\ldots,\ell}$$

最後に，閉ループ全体システムは，(26) 式の拡大系に(27)式のフィードバックを施して得られる．

6. 閉ループ全体システムのロバスト最適制御

すべてのサブシステムにおいて，フィードバックゲインβ_i を十分大きく選ぶと，局所コントローラのパラメータは(10)式を満たす．このとき，閉ループ全体システムは，構造物の特性パラメータの不確かさに対してロバスト安定化されることが文献[9] に報告されている．したがって，第**5**章で得られた閉ループ全体システムはロバスト安定化される．さらに，閉ループ全体システムの最適性について，つぎの定理が成り立つ．

定理２ (26) 式の拡大系に(27)式のフィードバックを施した閉ループ全体システムは，つぎの二次形式評価関数$\bar{J}$ を最小にする最適レギュレータになる．

$$\bar{J} = \int_0^\infty \left(\bar{x}^T(t)\,\bar{Q}\,\bar{x}(t) + \bar{v}^T(t)\bar{R}\bar{v}(t)\right) dt \tag{28}$$

ただし，$\bar{Q}$, $\bar{R}$ はそれぞれ次式で与えられる．

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & \bar{Q}_{14} & \bar{Q}_{15} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12}^T & \bar{Q}_{22} & 0 & \bar{Q}_{24} & \bar{Q}_{25} & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{33} & \bar{Q}_{34} & \bar{Q}_{35} & \bar{Q}_{36} \\ \bar{Q}_{14}^T & \bar{Q}_{24}^T & \bar{Q}_{34}^T & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{46} \\ \bar{Q}_{15}^T & \bar{Q}_{25}^T & \bar{Q}_{35}^T & \bar{Q}_{45}^T & \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{56} \\ \bar{Q}_{16}^T & \bar{Q}_{26}^T & \bar{Q}_{36}^T & \bar{Q}_{46}^T & \bar{Q}_{56}^T & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= \hat{\gamma}^2\hat{\alpha}K + K\hat{\alpha}\hat{\gamma}^2 + \hat{\gamma}^2\hat{\alpha}^2\bar{L}\,\bar{R}\,\bar{L}^T \\
\bar{Q}_{12} &= \frac{1}{2}\left(\hat{\gamma}^2\hat{\alpha}\bar{D} - \bar{D}\hat{\alpha}\hat{\gamma}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{K}\hat{\beta}\hat{\gamma}^2 - \hat{\gamma}^2\hat{\beta}\bar{K}\right) \\
\bar{Q}_{14} &= \hat{\gamma}\hat{\alpha}\hat{\mathcal{A}}_1\bar{L},\ \bar{Q}_{15} = \hat{\gamma}\hat{\alpha}\hat{\mathcal{A}}_2\bar{L} \\
\bar{Q}_{16} &= \hat{\gamma}\hat{\alpha}\hat{\mathcal{A}}_3\bar{L} + \bar{K}\bar{M}^{-1}\bar{L}\bar{\gamma}\bar{\beta} \\
\bar{Q}_{22} &= \hat{\gamma}^2\hat{\beta}\bar{D} + \bar{D}\hat{\beta}\hat{\gamma}^2 - \left(\hat{\gamma}^2\hat{\alpha}\bar{M} + \bar{M}\hat{\alpha}\hat{\gamma}^2\right) \\
&\quad + \hat{\gamma}^2\hat{\beta}^2\bar{L}\,\bar{R}\,\bar{L}^T \\
\bar{Q}_{24} &= \hat{\gamma}\hat{\beta}\hat{\mathcal{A}}_1\bar{L},\ \bar{Q}_{25} = \hat{\gamma}\hat{\beta}\hat{\mathcal{A}}_2\bar{L} \\
\bar{Q}_{26} &= \hat{\gamma}\left(\hat{\beta}\hat{\mathcal{A}}_3 - \hat{\alpha}\right)\bar{L} + \bar{D}\bar{M}^{-1}\bar{L}\bar{\gamma}\bar{\beta} \\
\bar{Q}_{33} &= \bar{\gamma}^2\bar{\mathcal{C}}_0^2\bar{R},\ \bar{Q}_{34} = \bar{\gamma}\bar{\mathcal{C}}_0\bar{\mathcal{A}}_1\bar{R},\ \bar{Q}_{35} = \bar{\gamma}\bar{\mathcal{C}}_0\bar{\mathcal{A}}_2\bar{R}
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{36} &= \bar{\gamma}\bar{\mathcal{C}}_0\bar{\mathcal{A}}_3\bar{R} - \bar{L}^T\bar{M}^{-1}\bar{L}\bar{\gamma}\bar{\beta}\bar{\mathcal{C}}_0 \\
\bar{Q}_{44} &= \{\bar{\gamma}^2\left(\bar{\mathcal{C}}_1^2 - 2\bar{\mathcal{C}}_0\bar{\mathcal{C}}_2\right) + 2\bar{\gamma}\bar{\mathcal{C}}_1\bar{\mathcal{A}}_1\}\bar{R} \\
\bar{Q}_{45} &= \bar{\gamma}\left(\bar{\mathcal{C}}_1\bar{\mathcal{A}}_2 + \bar{\mathcal{C}}_2\bar{\mathcal{A}}_1\right)\bar{R} \\
\bar{Q}_{46} &= \bar{\gamma}\left(\bar{\mathcal{A}}_1 + \bar{\mathcal{C}}_1\bar{\mathcal{A}}_3 - \bar{\mathcal{C}}_0\right)\bar{R} - \bar{L}^T\bar{M}^{-1}\bar{L}\bar{\gamma}\bar{\beta}\bar{\mathcal{C}}_1 \\
\bar{Q}_{55} &= \{\bar{\gamma}^2\left(\bar{\mathcal{C}}_2^2 - 2\bar{\mathcal{C}}_1\right) + 2\bar{\gamma}\bar{\mathcal{C}}_2\bar{\mathcal{A}}_2\}\bar{R} \\
\bar{Q}_{56} &= \bar{\gamma}\left(\bar{\mathcal{A}}_2 + \bar{\mathcal{C}}_2\bar{\mathcal{A}}_3 - \bar{\mathcal{C}}_1\right)\bar{R} - \bar{L}^T\bar{M}^{-1}\bar{L}\bar{\gamma}\bar{\beta}\bar{\mathcal{C}}_2 \\
\bar{Q}_{66} &= \{\bar{\gamma}^2 + 2\bar{\gamma}\left(\bar{\mathcal{A}}_3 - \bar{\mathcal{C}}_2\right)\}\bar{R} - 2\bar{L}^T\bar{M}^{-1}\bar{L}\bar{\gamma}\bar{\beta} \\
\bar{R} &= \hat{R}^{-1}
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\hat{\alpha} = \mathrm{diag}\{\alpha_i I_{n_i}\}_{i=1,2\ldots,\ell},\ \hat{\beta} = \mathrm{diag}\{\beta_i I_{n_i}\}_{i=1,2\ldots,\ell}$$
$$\hat{\gamma} = \mathrm{diag}\{\gamma_i I_{n_i}\}_{i=1,2\ldots,\ell},\ \hat{\mathcal{A}}_1 = \mathrm{diag}\{a_{i_1} I_{n_i}\}_{i=1,2\ldots,\ell}$$
$$\hat{\mathcal{A}}_2 = \mathrm{diag}\{a_{i_2} I_{n_i}\}_{i=1,2\ldots,\ell}\ \hat{\mathcal{A}}_3 = \mathrm{diag}\{a_{i_3} I_{n_i}\}_{i=1,2\ldots,\ell}$$

なお，(27)式のフィードバックにおいて$\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\hat{R}$ は，(29)式の$\bar{Q}$ とつぎの行列$\bar{P}$ を正定にするように選ばれるものとする．

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \hat{\gamma}^2\hat{\alpha}\bar{M} & 0 & 0 & 0 & \hat{\gamma}\hat{\alpha}\bar{L} \\ \bar{M}\hat{\alpha}\hat{\gamma}^2 & \hat{\gamma}^2\hat{\beta}\bar{M} & 0 & 0 & 0 & \hat{\gamma}\hat{\beta}\bar{L} \\ 0 & 0 & \bar{\gamma}^2\bar{\mathcal{C}}_0\bar{\mathcal{C}}_1\bar{R} & \bar{\gamma}^2\bar{\mathcal{C}}_0\bar{\mathcal{C}}_2\bar{R} & \bar{\gamma}^2\bar{\mathcal{C}}_0\bar{R} & \bar{\gamma}\bar{\mathcal{C}}_0\bar{R} \\ 0 & 0 & \bar{R}\bar{\mathcal{C}}_2\bar{\mathcal{C}}_0\bar{\gamma}^2 & \bar{\gamma}^2\left(\bar{\mathcal{C}}_1\bar{\mathcal{C}}_2 - \bar{\mathcal{C}}_0\right)\bar{R} & \bar{\gamma}^2\bar{\mathcal{C}}_1\bar{R} & \bar{\gamma}\bar{\mathcal{C}}_1\bar{R} \\ 0 & 0 & \bar{R}\bar{\mathcal{C}}_0\bar{\gamma}^2 & \bar{R}\bar{\mathcal{C}}_1\bar{\gamma}^2 & \bar{\gamma}^2\bar{\mathcal{C}}_2\bar{R} & \bar{\gamma}\bar{\mathcal{C}}_2\bar{R} \\ L^T\bar{\alpha}\bar{\gamma} & L^T\bar{\beta}\bar{\gamma} & \bar{R}\bar{\mathcal{C}}_0\bar{\gamma} & \bar{R}\bar{\mathcal{C}}_1\bar{\gamma} & \bar{R}\bar{\mathcal{C}}_2\bar{\gamma} & \bar{\gamma}\bar{R} \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$\bar{P}_{11} = \frac{1}{2}\left(\hat{\gamma}^2\hat{\alpha}\bar{D} + \bar{D}\hat{\alpha}\hat{\gamma}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\hat{\gamma}^2\hat{\beta}\bar{K} + \bar{K}\hat{\beta}\hat{\gamma}^2\right) + \hat{\gamma}^2\hat{\alpha}\hat{\beta}\bar{L}\,\bar{R}\,\bar{L}^T$$

(証明) 宇宙構造物の不安定極は$s = 0$ の剛体モードのみであり，(3) 式の条件から

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \bar{D} & \bar{L} \end{bmatrix} = \bar{n},\ \ \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \bar{K} & \bar{L} \end{bmatrix} = \bar{n}, \tag{33}$$

が成り立つため，(22), (23)式で表される宇宙構造物は可安定である．さらに，各サブシステムの高域遮断フィルタは原点$s = 0$に零点をもたないため，構造物とフィルタの間で不安定極の極零相殺は生じない．したがって，拡大系(26) は可安定である．

$(\bar{A}, \bar{B})$ が可安定対であれば，正定行列$\bar{Q}$，$\bar{R}$ に対して，つぎのRiccati方程式は唯一正定解$\bar{P}$ をもつ．

$$\bar{P}\bar{A} + \bar{A}^T\bar{P} - \bar{P}\bar{B}\bar{R}^{-1}\bar{B}^T\bar{P} + \bar{Q} = 0 \tag{34}$$

このRiccati 方程式を満たす$\tilde{P}$ は(32)式で求められる．定理 **2** の条件より行列$\bar{P}$ が正定であるから，$\bar{P}$ はRiccati 方程式の唯一正定解となる．この$\bar{P}$ を用いたフィードバック$\bar{v}(t) = -\bar{R}^{-1}\bar{B}^T\bar{P}\bar{x}(t)$ は，(26)式の拡大系を安定化し, 閉ループ全体システムは(28)式の二次形式評価関数$\bar{J}$ を最小にする最適レギュレータになる．一方，(32) 式の$\bar{P}$ を用いてこの$\bar{v}(t)$ を計算すると

$$\begin{aligned}\bar{v}(t) &= -\bar{R}^{-1}\bar{B}^T\bar{P}\bar{x}(t)\\ &= -\bar{\gamma}\{\bar{\alpha}\hat{R}\bar{y}(t) + \bar{\beta}\hat{R}\dot{\bar{y}}(t) + \bar{u}(t)\} \qquad (35)\end{aligned}$$

となり，これは(27)式のフィードバックと一致する．したがって，(26) 式の拡大系に(27)式のフィードバックを施した閉ループ全体システムは，(28)式の$\bar{J}$ を最小にする最適レギュレータになる． **（証明終わり）**

(注意 2) 定理 **2** の条件を満たす局所コントローラのゲインが必ず存在することは，つぎのようにして示すことができる．一つの方法として，(27) 式において$\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, $\gamma_i = \gamma$, for all i とする．まず，任意のα を選び，つぎにα に比較してβ を十分大きくする．さらに，十分大きなγ を選ぶと$\bar{Q}$, $\bar{P}$ は正定になる．もう一つの方法としては，すべてのサブシステムにおいてα_i とβ_i の比を一定にして，α_i に比較して十分大きいβ_i を与える．そのうえで，すべてのサブシステムで$\alpha_i\gamma_i^2$ の値を一定にして，十分大きなγ_i を選ぶことによって$\bar{Q}$, $\bar{P}$ を正定にすることができる．ただし，これらの方法はα_i, β_i, γ_i の選び方の例であり，定理**2**を満たすフィードバックゲインの選び方は，ここで述べた二つの方法に限定されるわけではない．

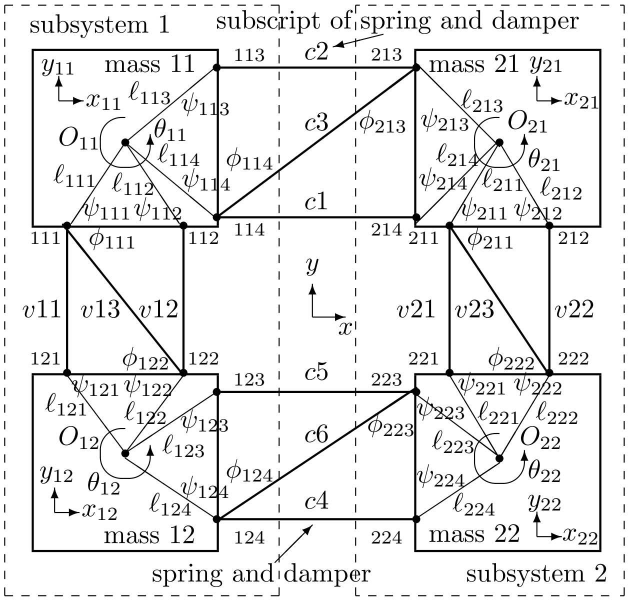


図3 Space structure

表1 Characteristic parameters of structure

i	j	m_{ij}	J_{ij}	k_{vil}	d_{vil}
1	1	10.0	5.0	1000	1.2
	2	10.0	5.0		
2	1	10.0	5.0		
	2	50.0	25.0		

$l = 1, 2, 3$

7. 数値例

7.1 構造物の記述 この章では，図 3 のように二つの剛体が，バネとダンパで近似される柔軟なリンクによってy方向に柔結合されたサブシステム1, 2からなる柔軟宇宙構造物の位置と姿勢を制御する例を考える．第iサブシステムの第j番目の剛体ij の質量をm_{ij}，慣性モーメントをJ_{ij} で表す．各剛体ij はx_{ij}方向とy_{ij}方向の並進運動，および質量中心O_{ij} 回りにθ_{ij} 方向の回転運動を行うものとする．また，第iサブシステム内で剛体をy方向に結合するリンクのダンパ定数とバネ定数をd_{vil}, $k_{vil}(l = 1, 2, 3)$ で表し，サブシステムをx方向に結合するリンクのダンパ定数とバネ定数をd_{cp}, $k_{cp}(p = 1, \ldots, 6)$で表す．結合点ijkは剛体ij におけるk番目の結合点を表し，ℓ_{ijk}は剛体ij の質量中心から結合点ijkまでの距離を表す．ψ_{ijk}は質量中心と結合点ijkを結ぶ線分と剛体の辺がなす角度を表し，ϕ_{ijk}は剛体の辺と斜めに取り付けられたリンクがなす角度を表す．センサ, アクチュエータ, 局所コントローラは剛体$ii(i = 1, 2)$の質量中心に配置され，センサは剛体ii の変位x_{ii}，y_{ii}と角変位θ_{ii}を検出し，アクチュエータは操作入力としてx_{ii} 方向とy_{ii}方向に力を加え，O_{ii}回りにトルクを加えるものとする．なお，すべての剛体が$x_{ij} = 0$, $y_{ij} = 0$, $\theta_{ij} = 0$で静止しているとき，剛体間のリンクにより発生する力とトルクは0であるとする．ここで，宇宙構造物の特性パラメータを表 1 のように与える．なお，サブシステムを柔結合するリンクのパラメータは$k_{cp} = 1000.0$, $d_{cp} = 1.2$ とした．構造物のリンクの角度と長さについては，$\phi_{111}, \phi_{122}, \phi_{211}, \phi_{222}$ を60[$^\circ$]，$\phi_{114}, \phi_{124}, \phi_{213}, \phi_{223}$ を 70[$^\circ$]，ψ_{ijl}を60[$^\circ$]，ℓ_{ijk} を 1.0 とする．

7.2 最適制御 ここでは，四次の局所コントローラを用いて，定理 **2** の最適条件を満たすコントローラで制御した場合とその条件を満たさないコントローラを用いた場合について数値シミュレーションを行い，構造物の変位/角変位の応答特性を比較する．図 3 の構造物に対して設計された四次の局所コントローラのパラメータを表 2, 3に示す．表 2の局所コントローラのパラメータは，定理 **2** の最適条件を満たし，表 3 のパラメータは，$\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ の値が小さいため，定理 **2** の$\bar{Q}$, $\bar{P}$ が正定にならず，定理の条件を満たしていない．なお，両者において $R_i\,(i = 1, 2)$ は三次の

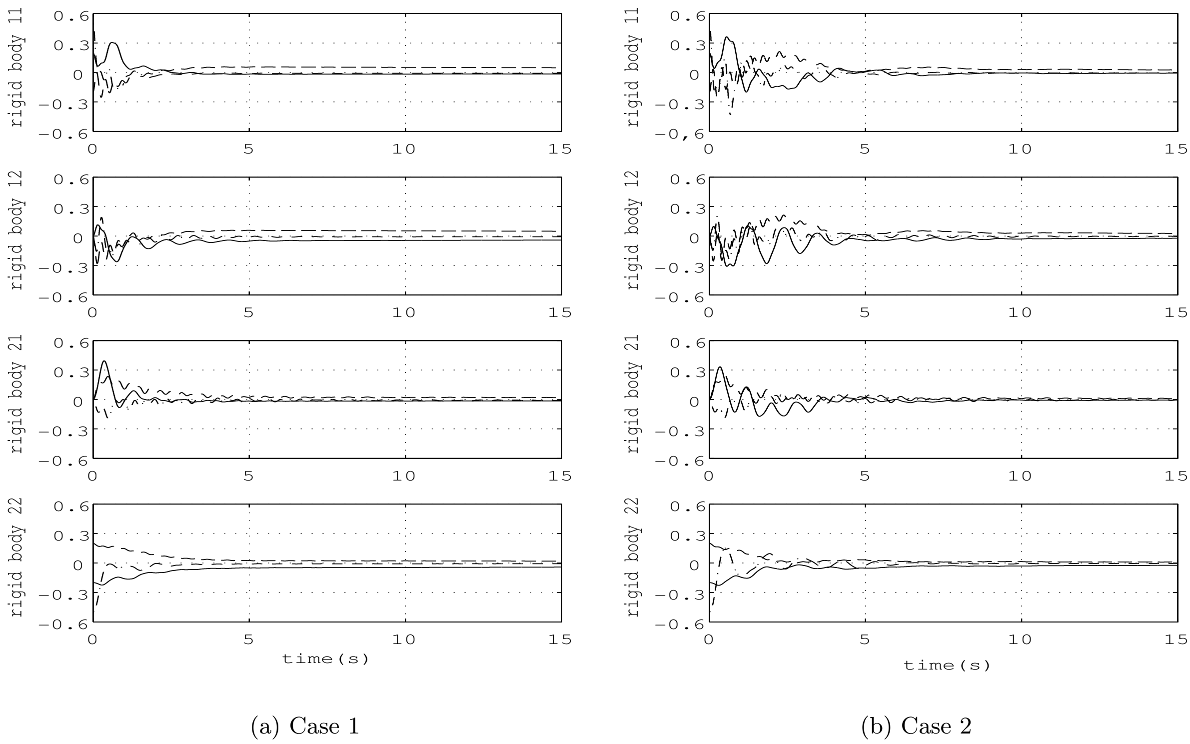


図4 Initial-state responses of displacements and rotational angles

単位行列とした．初期値応答を計算するための初期変位／角変位を$x_{11}(0)=0.2$, $y_{11}(0)=-0.2$, $\theta_{11}(0)=0.5$, $x_{22}(0)=-0.2$, $y_{22}(0)=0.2$, $\theta_{22}(0)=-0.5$ として与え，これら以外の変位／角変位の初期値はすべて0とした．なお，シミュレーションにおけるサンプリング時間は$\Delta T=1.5\times10^{-4}[s]$ とした．

表1 に示す特性パラメータをもつ構造物を，表2 のコントローラ で分散制御した場合(Case 1)と表3 のコントローラ で分散制御した場合(Case 2)における閉ループ全体システムの初期値応答をそれぞれ図 4 (a)と(b)に示す．この図において左側の(a)がCase 1，右側の(b)がCase 2 の応答であり，グラフは上から剛体11, 12, 21, 22の変位／角変位の初期値応答を示している．各図において実線，破線，鎖線はそれぞれ変位 $x_{ij}(t), y_{ij}(t)$, 角変位 $\theta_{ij}(t)$を表す．図4 より Case 1，Case 2 いずれの場合も閉ループ全体システムは安定化されているが，Case 1 の方が，Case 2 に比べて振幅が小さくなっていることがわかる．

7.3 ロバスト安定化 ここでは，本論文で提案した方法によって，閉ループ全体システムがロバスト安定化されていることを示す．構造物の特性パラメータが，表1 に示されたノミナルな特性パラメータから，その不確定性のために実際には表4 のように変動していた場合を考える．なお，構造物は表2のコントローラ で制御されているものとする．

このときの閉ループ全体システムの初期値応答を図5 に示す．初期変位／角変位は，前節と同じであるとし，グラフは上から剛体11, 12, 21, 22の変位／角変位の初期値応答を示している．各図において実線，破線，鎖線は，図4 の場合と同様に，それぞれ変位 $x_{ij}(t), y_{ij}(t)$, 角変位 $\theta_{ij}(t)$を表す．なお，このシミュレーションにおいては，それぞれの変位／角変位の応

表2 Local controllers parameters satisfying conditions of Theorem **2**(Case 1)

i	z_{i1}	z_{i2}	z_{i3}	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}
1	0.8	2.5	19.1	2.4	19.0	29.3
2	0.4	2.43	9.53	1.8	9.52	16.9

i	α_i	β_i	γ_i
1	1.0	60.0	1500.0
2	1.5	90.0	1224.7

表3 Local controllers parameters not satisfying conditions of Theorem **2**(Case 2)

i	z_{i1}	z_{i2}	z_{i3}	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}
1	0.8	2.5	19.1	2.4	19.0	29.3
2	0.4	2.43	9.53	1.8	9.52	16.9

i	α_i	β_i	γ_i
1	1.0	20.0	100.0
2	1.5	30.0	100.0

表4 Perturbed parameters of structure

i	j	m_{ij}	J_{ij}	k_{vil}	d_{vil}
1	1	50.0	25.0	500	0.19
	2	50.0	25.0		
2	1	50.0	25.0		
	2	250.0	125.0		

$l = 1, 2, 3$

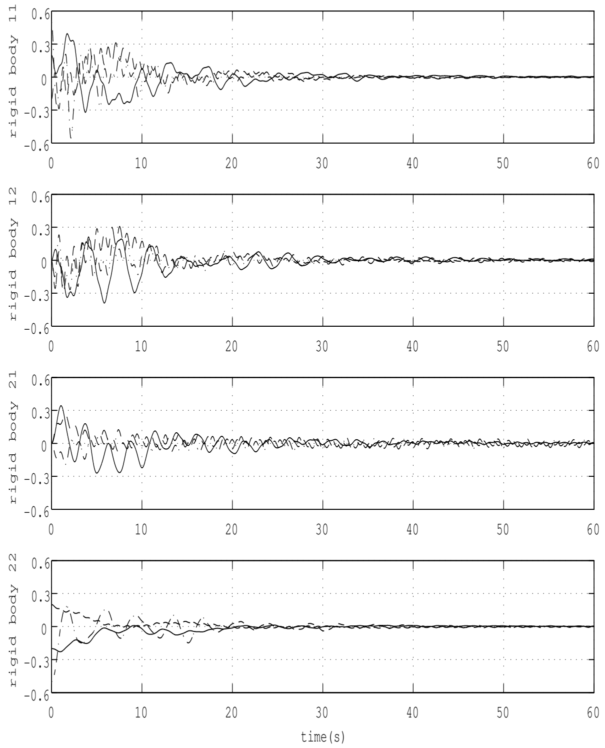


図5 Initial-state responses of displacements and rotational angles of structure with pertubed parameters

答が原点に収束することを示すために，サンプリング時間を$\Delta T = 6.0 \times 10^{-4}[s]$ とした．この図より，すべての変位と角変には原点に収束し，安定性を保っていることがわかる．したがって，本論文で提案するコントローラは，構造物の特性パラメータの不確かさ，あるいは特性パラメータ変動が生じた場合においても，閉ループ全体システムをロバスト安定化していることがわかる．

8. おわりに

本論文では，センサ／アクチュエータ・コロケーションされた大型柔軟宇宙構造物において，変位出力を用いた四次のプロパーな局所コントローラによって構造物の位置と姿勢を分散制御する方法を提案した．まず，各サブシステムの局所コントローラが位相進み補償器になるようにコントローラのパラメータを与えることによって，閉ループサブシステムと閉ループ全体システムをともに構造物の特性パラメータの不確かさに対してロバスト安定化できることを述べた．そして，その局所コントローラにおいて，フィードバックの二つのパラメータを十分に大きく選ぶことによって，閉ループサブシステムと閉ループ全体システムが，ある二次形式評価関数を最小にする最適レギュレータになることを示した．あわせて，閉ループサブシステムと閉ループ全体システムを最適レギュレータにするために局所コントローラのパラメータが満たすべき条件を明らかにした．最後に，構造物の位置と姿勢を制御する場合，最適レギュレータの条件を満たす提案法のコントローラの方が，条件を満たさないコントローラに比べて，変位／角変位の振幅を抑制できることを数値例によって示した．また，提案法によれば，構造物の特性パラメータに変動が生じた場合においても，閉ループ全体システムをロバスト安定化できることを数値例によって示した．

参考文献

(1) T. A. Hagler:“ Building Large Structures in Space ”, Astronautics and Aeronautics, May, pp. 56-61, 1976.

(2) J. C. Mankins:“ The Space Solar Power Option ”, Aerospace America, Vol. 35, pp. 30-36, 1997.

(3) M. J. Balas:“ Direct Velocity Feedback Control of Large Space Structures ”, J. Guidance and Control, Vol. 2, No. 3, pp.252-253, 1979.

(4) A. Abel and N. K. Gupta:“ Robust Collocated Control for Large Flexible Space Structures ”, J. Guidance and Control, Vol. 4, No. 5, pp.480-486, 1981.

(5) S. M. Joshi:“ Robustness Properties of Collocated Controllers for Flexible Space Spacecraft ”, J. Guidance, Vol. 9, No. 1, pp.85-91, 1986.

(6) 糀谷，池田，木田：「Collocated Feedbackによる宇宙構造物の最適制御」，計測自動制御学会論文集, Vol. 25, No. 8, pp. 882-888，1989.

(7) Y. Fujisaki，M. Ikeda，and K. Miki:“ Robust Stabilization of Large Space Structures Via Displacement Feedback ”, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-46，No. 12，pp. 1993-1996, 2001.

(8) 小林，池田，藤崎：「大型宇宙構造物の変位の簡単な動的フィードバックによる最適制御」，計測自動制御学会論文集, Vol. 38, No. 8, pp. 694-701，2002.

(9) Y. Kobayashi and R. Imoto:“ Decentralized Robust Control of Large Space Structures by Local Proper Controllers Using Displacement Output Feedback ”, Proceedings of SICE Annual Conference 2012, pp. 524-527, 2012.

(10) Y. Kobayashi:“ Decentralized Robust Optimal Control of Large Flexible Space Structures by Local Proper Controllers Using Displacement Output ”, Bulletin of the JSME Mechanical Engineering Journal, Vol. 2, No. 3, Paper No. 14-00555, pp. 1-12, 2015.

(11) M. J. Balas:“ Trends in Large Space Structure Control Theory: Fondest Hopes, Wildest Dreams ”, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-27, No. 3, pp. 522-535, 1982.

(12) B. C. Kuo:“ Automatic Control Systems ”, pp. 329-388, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967.

(13) 藤井：「最適レギュレータの逆問題」，計測と制御，Vol. 27, No. 8，pp. 717-726，1988.