$\Gamma_0^{(2)}(5)$ の Siegel 保型形式

吉村弥子*

Siegel modular forms of $\Gamma_0^{(2)}(5)$

Miko YOSHIMURA*

ABSTRACT

Siegel modular forms of degree two of weight k of level N are given explicitly for N=1, 2, and given under some conditions for N=3, 4. So it has reasons and meanings that giving them for N=5. This paper shows several hints on giving Siegel modular forms of $\Gamma_0^{(2)}(5)$ and show some of the forms by describing their Fourier expansions.

Keywords : $\Gamma_0^{(2)}(5)$, Siegel modular form, lifting, theta function

1. はじめに

$$H_2=\left\{Z=X+iY\in M_2(\mathbb{C})\ \middle|\ \begin{array}{l}X,\ Y\in M_2(\mathbb{R})\\ {}^tZ=Z,\ Y>0\end{array}\right\}$$

$$\Gamma_0^{(2)}(N)=\left\{g=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{Z})\ \middle|\ \begin{array}{l}{}^tg\begin{pmatrix}0 & -1_2\\ 1_2 & 0\end{pmatrix}g=\begin{pmatrix}0 & -1_2\\ 1_2 & 0\end{pmatrix}\\ C\equiv 0 \pmod N\end{array}\right\}$$

とする．このときH_2上の$\mathbb{C}$値正則関数 f で

$$\forall Z\in H_2,\ \forall g=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in\Gamma_0^{(2)}(N)$$

に対して，

$$f\left((AZ+B)(CZ+D)^{-1}\right)=\det(CZ+D)^k f(Z)$$

を満たすものを，$\Gamma_0^{(2)}(N)$上のweight k のSiegel保型形式といい，このような f の集合は環をなす．それを$\Gamma_0^{(2)}(N)$ の保型形式環という

現在までに $\Gamma_0^{(2)}(=\Gamma_0^{(2)}(1)),\Gamma_0^{(2)}(2)$ については保型形式環が完全にわかっている．また，$\Gamma_0^{(2)}(3),\Gamma_0^{(2)}(4)$ については、ある character を使って定義した指数 2 の部分群に関する保型形式環が具体的に与えられている．($\Gamma_0^{(2)}(1)$ については Igusa, その他については Ibukiyama らによる．）よって次に $\Gamma_0^{(2)}(5)$ の保型形式環について調べることには意味がある．具体的には，$\Gamma_0^{(2)}(5)$ の保型形式のなす環の構造を決定し，また，その生成元となる保型形式をすべて具体的な式で構成して書き下す必要がある．

この論文では，$\Gamma_0^{(2)}(5)$の保型形式環についてすでにわかっていることと保型形式のいくつかの具体的な計算方法のヒントを述べ，さらに現在までに計算できている保型形式を紹介する．

2. $\Gamma_0^{(2)}(5)$の weight ごとの次元と $\Gamma_0^{(1)}(5)$ の様子

$A_k(\Gamma)$ を Γ に関するweight k の保型形式全体，$S_k(\Gamma)$ を Γ に関するweight k の保型形式のうちの cusp forms 全体としたとき，Γ に対するtを変数とする無限和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dim A_k(\Gamma)\,t^k$，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dim S_k(\Gamma)\,t^k$ は次元公式と呼ばれており，様々なΓに関する次元公式が Ibukiyama によりすでに計算されている．それによると，$\Gamma_0^{(2)}(5)$の次元公式は

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\dim A_k\left(\Gamma_0^{(2)}(5)\right)t^k\\ =&\ \frac{\begin{array}{l}1+t^2+4t^4+7t^6+10t^8+10t^{10}+3t^{11}\\ \quad+10t^{12}+6t^{13}+6t^{14}+10t^{15}+3t^{16}\\ \quad+10t^{17}+10t^{19}+7t^{21}+4t^{23}+t^{25}+t^{27}\end{array}}{(1-t^4)^2(1-t^6)(1-t^{10})}\\ =&\ 1+t^2+6t^4+10t^6+22t^8+34t^{10}+\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\dim S_k\left(\Gamma_0^{(2)}(5)\right)t^k\\ =&\ \frac{\begin{array}{l}t^4+5t^6+11t^8+14t^{10}+3t^{11}+14t^{12}+6t^{13}\\ \quad+9t^{14}+10t^{15}+5t^{16}+10t^{17}-t^{18}+10t^{19}\\ \quad-3t^{20}+7t^{21}-3t^{22}+4t^{23}+t^{25}+t^{27}\end{array}}{(1-t^4)^2(1-t^6)(1-t^{10})}\\ =&\ t^4+5t^6+13t^8+25t^{10}+3t^{11}+44t^{12}+\cdots\end{aligned}$$

*一般科 准教授

である．この式において，$\Gamma_0^{(2)}(5)$の保型形式環およびその cusps に weight k のものが何次元分存在するのか (つまり独立なものがいくつとれるのか) がt^kの係数としてあらわれている．例えば, weight 0,2 の保型形式は1次元(cuspなし), weight 4の保型形式は6次元(うちcuspが1次元), weight 6の保型形式は10次元(うち5次元がcusps)であるとわかる．よってそれぞれのweightごとにその次元分の個数の独立な保型形式を見つけることが保型形式環の構造と生成元の決定につながる．

ところで,

$$H_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$$

$$\Gamma_0^{(1)}(N) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; {}^t g \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ c \equiv 0 \pmod N \right\}$$

としたとき, H_1上の$\mathbb{C}$値正則関数fで

$$\forall z \in H_1,\ \forall g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{(1)}(N)$$

に対して,

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \det(cz+d)^k f(z)$$

を満たすものを, $\Gamma_0^{(1)}(N)$上のweight k の保型形式といい, このような f の集合は環をなす．

$N = 5$の場合の保型形式環$A\left(\Gamma_0^{(1)}(5)\right)$およびそのcuspsからなる環$S\left(\Gamma_0^{(1)}(5)\right)$の構造とそれらの次元公式には次のような対応がある．

$$\begin{aligned} A\left(\Gamma_0^{(1)}(5)\right) &= \mathbb{C}[E_2,\chi_4] \oplus f_4\mathbb{C}[E_2,\chi_4] \\ &\updownarrow \\ \sum_{k=0}^{\infty} \dim A_k\left(\Gamma_0^{(1)}(5)\right) t^k &= \frac{1+t^4}{(1-t^2)(1-t^4)} \\ S\left(\Gamma_0^{(1)}(5)\right) &= \chi_4 A\left(\Gamma_0^{(1)}(5)\right) \\ &\updownarrow \\ \sum_{k=0}^{\infty} \dim S_k\left(\Gamma_0^{(1)}(5)\right) t^k &= \frac{t^4(1+t^4)}{(1-t^2)(1-t^4)} \end{aligned}$$

ここで, $q = e^{2\pi i\tau}$ として,

$E_2 = E_2(\tau) = 1 + 6q + 18q^2 + 24q^3 + 42q^4 + \cdots$はweight 2の保型形式, $\chi_4 = \chi_4(\tau) = q - 4q^2 + 2q^3 + 8q^4 - \cdots$ と $f_4 = f_4(\tau) = -24 + 240q + 2160q^2 + 6720q^3 + \cdots$ はweight 4の保型形式で, χ_4はcusp formである．

この対応と, $\Gamma_0^{(2)}(5)$ の次元公式と $\Gamma_0^{(2)}(5)$ の保型形式環の構造には類似性が有るのではないかと考えられている．

3. $\Gamma_0^{(2)}(5)$の保型形式の具体的な構成について

$\Gamma_0^{(2)}(5)$の保型形式の構成方法として, Eisenstein級数, Theta定数, 球関数付きtheta関数, 微分作用素を使う方法, Hecke作用素を使う方法, liftingによる方法などが知られている．ここでは, 第 4. 章で示す保型形式を計算した方法であるliftingで使った $\Gamma_0^{(1)}(5)$ の Jacobi forms と, 球関数付きtheta関数を具体的に構成した際に使った行列などを示す．

3.1 liftingする$\Gamma_0^{(1)}(5)$ の Jacobi forms

$\Gamma_0^{(2)}(5)$の保型形式は, $\Gamma_0^{(1)}(5)$のJacobi forms のSaito-Kurokawa lifting によっても作られる． ここでは, $\Gamma_0^{(1)}(5)$のJacobi forms のなす空間$J_{k,1}(\Gamma_0^{(1)}(5)^J)$を具体的に示す．

$$\begin{aligned} & J_{k,1}\left(\Gamma_0^{(1)}(5)^J\right) \\ = \ & A\left(\Gamma_0^{(1)}(5)\right) f_{2,1} \oplus \mathbb{C}[E_2,\chi_4]\chi_{4,1} \oplus \mathbb{C}[E_2,\chi_4]E_{4,1} \end{aligned}$$

ここで, $q = e^{2\pi i\tau}$, $\zeta = e^{2\pi iz}$ として,

$$\begin{aligned} f_{2,1} &= f_{2,1}(\tau,z) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{2}{\zeta} + 2\zeta + \zeta^2\right) q + \left(\frac{6}{\zeta} + 6 + 6\zeta\right) q^2 \\ &\quad + \left(\frac{2}{\zeta^3} + \frac{6}{\zeta^2} + 8 + 6\zeta^2 + 2\zeta^3\right) q^3 + \cdots \\ \chi_{4,1} &= \chi_{4,1}(\tau,z) \\ &= \left(\frac{1}{2\zeta} + \frac{\zeta}{2}\right) q + \left(-\frac{3}{2\zeta} - 1 - \frac{3\zeta}{2}\right) q^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2\zeta^3} - \frac{1}{\zeta^2} + 3 - \zeta^2 + \frac{\zeta^3}{2}\right) q^3 + \cdots \\ E_{4,1} &= E_{4,1}(\tau,z) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{56}{\zeta} + 126 + 56\zeta + \zeta^2\right) q \\ &\quad + \left(\frac{126}{\zeta^2} + \frac{576}{\zeta} + 756 + 576\zeta + 126\zeta^2\right) q^2 + \cdots \end{aligned}$$

である．

3.2 球関数付きtheta関数で使った行列

この論文における計算では, level $q = 5$, $\det F = 25$ である次の行列

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

を使っている．まず, ${}^t\xi F\xi = O$ の解$\xi \in M_{4,2}(\mathbb{C})$ を探す．その解を$\xi_{i,j}$として,

$$Tk[k;i,j] = \sum_{N \in M_{2,4}(\mathbb{Z})} \left(\det\left(NF\xi_{i,j}\right)\right)^{k-2} e^{\pi i tr(NF{}^tNZ)}$$

を計算したものが0にならなければ, それが求めるweight k の球関数付きtheta関数の一つである．ここで$Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{pmatrix}$である．

さらに, $Tk[k;i,j] \neq 0$ のとき, その実部 $Tkr[k;i,j]$ と虚部 $Tki[k;i,j]$ ももちろん球関数付き theta 関数である．

なお, 球関数付き theta 関数を求めるために, この論文では以下のベクトルを用いて$\xi_{i,j} = \left({}^t m[i]\ {}^t m[j]\right)$ とした．

$$\begin{aligned} m[3] &= \left(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, \sqrt{3}i, 0\right) \\ m[5] &= \left(5, 0, \sqrt{5}i, 0\right) \\ m[9] &= \left(\sqrt{5}-i, \sqrt{5}+2i, 3i, -3i\right) \\ m[27] &= \left(3\sqrt{5}-\sqrt{15}-\left(3-\sqrt{3}\right)i,\right. \\ &\quad 2\left(3-\sqrt{3}\right)i+2\sqrt{15}, \\ &\quad \left. 6i,\ -3\left(3-\sqrt{3}\right)i\right) \end{aligned}$$

4. 具体的に計算したSiegel保型形式

ここからは, 計算され, Fourier展開を具体的に書き下された$\Gamma_0^{(2)}(5)$ のSiegel保型形式を各weight kごとに示す. ここで, $q=e^{2\pi i\tau}$, $\zeta=e^{2\pi iz}$, $w=e^{2\pi i\omega}$ である.

4.1 k=0 weight 0 の保型形式は1次元, cusp はない. しかもそれは定数関数, 即ち, $f=$"定数" である.

4.2 k=2 weight 2 の保型形式も1次元で cusp はない. そのひとつとして, $f_{2,1}$の lifting $L(f_{2,1})$を取れる.

$$\begin{aligned} & L_5(f_{2,1}) \\ = \ & \frac{1}{6}+q+3q^2+4q^3+7q^4+q^5+12q^6+8q^7\cdots \\ & +\left(1+\left(\frac{1}{\zeta^2}+\frac{2}{\zeta}+2\zeta+\zeta^2\right)q+\left(\frac{6}{\zeta}+6+6\zeta\right)q^2\right. \\ & \qquad \left. +\left(\frac{2}{\zeta^3}+\frac{6}{\zeta^2}+8+6\zeta^2+2\zeta^3\right)q^3+\cdots\right)w \\ & +\left(3+\left(\frac{6}{\zeta}+6+6\zeta\right)q\right. \\ & \qquad \left. +\left(\frac{3}{\zeta^4}+\frac{6}{\zeta^3}+\frac{12}{\zeta^2}+\frac{6}{\zeta}+6\zeta+\cdots\right)q^2+\cdots\right)w^2 \\ & +(\cdots)w^3+\cdots \end{aligned}$$

4.3 k=4 weight 4 の保型形式は6次元あり, そのうち1次元がcuspである. 現在までにcuspが1つと独立なnon-cuspが3つ見つかっている. 具体的には, cusp として$\chi_{4,1}$のlifting $L_5\left(\chi_{4,1}\right)$があり, non-cusp として$k=2$のnon-cuspを2乗した$\left(L_5\left(f_{2,1}\right)\right)^2$, $E_2 f_{2,1}$のlifting $L_5\left(E_2 f_{2,1}\right)$, $E_{4,1}$のlifting $L_5\left(E_{4,1}\right)$がある. なお, cusp は球関数付きtheta関数としても構成できるが, 当然ながらliftingで得られるものと同じものである.

$$\begin{aligned} & L_5(\chi_{4,1}) \\ = \ & \left(\left(\frac{1}{2\zeta}+\frac{\zeta}{2}\right)q+\left(-\frac{3}{2\zeta}-1-\frac{3\zeta}{2}\right)q^2+\cdots\right)w \\ & +\left(\left(-\frac{3}{2\zeta}-1-\frac{3\zeta}{2}\right)q+(\cdots)q^2+\cdots\right)w^2 \\ & +\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (L_5(f_{2,1}))^2 \\ = \ & \frac{1}{36}+\frac{q}{3}+2q^2+\frac{22q^3}{3}+\frac{58q^4}{3}+\frac{115q^5}{3}+\cdots \\ & +\left(\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3\zeta^2}+\frac{2}{3\zeta}+2+\frac{2\zeta}{3}+\frac{\zeta^2}{3}\right)q+\cdots\right)w \\ & +\left(2+\left(\frac{2}{\zeta^2}+\frac{6}{\zeta}+8+6\zeta+2\zeta^2\right)q+\cdots\right)w^2 \\ & +\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & L_5(E_2 f_{2,1}) \\ = \ & -\frac{31}{60}+q+9q^2+28q^3+73q^4+q^5+252q^6+\cdots \\ & +\left(1+\left(\frac{1}{\zeta^2}+\frac{2}{\zeta}+6+2\zeta+\zeta^2\right)q+\cdots\right)w \\ & +\left(9+\left(\frac{6}{\zeta^2}+\frac{18}{\zeta}+24+18\zeta+6\zeta^2\right)q+\cdots\right)w^2 \\ & +\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & L_5(E_{4,1}) \\ = \ & -\frac{31}{60}+q+9q^2+28q^3+73q^4+q^5+252q^6+\cdots \\ & +\left(1+\left(\frac{1}{\zeta^2}+\frac{56}{\zeta}+126+56\zeta+\zeta^2\right)q+\cdots\right)w \\ & +\left(9+\left(\frac{126}{\zeta^2}+\frac{576}{\zeta}+756+\cdots\right)q+\cdots\right)w^2 \\ & +\cdots \end{aligned}$$

4.4 k=6 weight 6 の保型形式は10次元で, そのうちcuspsが5次元である.

今までに独立なcuspsが5つ計算できているので, cuspsは本質的には全て見つかったと言える. 独立な5つとして, weight 2のnon-cuspとweight 4のcuspの積$L_5(f_{2,1})\times L_5(\chi_{4,1})$, $\chi_4 f_{2,1}$のlifting $L_5(\chi_4 f_{2,1})$, 球関数付きtheta関数 $Tk[6;5,9]$の実部の$Tkr[6;5,9]$, 球関数付きtheta関数 $Tk[6;3,27]$の実部の$Tkr[6;3,27]$と虚部の$Tki[6;3,27]$を取れる.

$$\begin{aligned} & L_5(f_{2,1})\times L_5(\chi_{4,1}) \\ = \ & \left(\left(\frac{1}{12\zeta}+\frac{\zeta}{12}\right)q+\left(\frac{1}{4\zeta}-\frac{1}{6}+\frac{\zeta}{4}\right)q^2+\cdots\right)w \\ & +\left(\left(\frac{1}{4\zeta}-\frac{1}{6}+\frac{\zeta}{4}\right)q+\cdots\right)w^2 \\ & +\cdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&L_5(\chi_4 f_{2,1})\\
=\ &\left(q+\left(\frac{1}{\zeta^2}+\frac{2}{\zeta}-4+2\zeta+\zeta^2\right)q^2+\cdots\right)w\\
&+\left(\left(\frac{1}{\zeta^2}+\frac{2}{\zeta}-4+2\zeta+\zeta^2\right)q+\cdots\right)w^2\\
&+\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Tkr[6;3,27]\times \text{ある定数}\\
=\ &\left(\left(\frac{1}{\zeta}+\zeta\right)q+\left(\frac{\frac{1351}{27}+\frac{190}{3\sqrt{3}}}{\zeta}+\cdots\right)q^2+\cdots\right)w\\
&+\left(\left(\frac{\frac{1351}{27}+\frac{190}{3\sqrt{3}}}{\zeta}+\left(\frac{916}{27}+\frac{160}{3\sqrt{3}}\right)+\cdots\right)q\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{\frac{1351}{27}+\frac{190}{3\sqrt{3}}}{\zeta^3}+\frac{\frac{1829}{54}-\frac{455}{9\sqrt{3}}}{\zeta^2}+\cdots\right)q^2+\cdots\right)w^2\\
&+\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Tkr[6;5,9]\times \text{ある定数}\\
=\ &\left(\left(\frac{27}{\zeta}+27\zeta\right)q+\left(\frac{91}{\zeta}-74+91\zeta\right)q^2+\cdots\right)w\\
&+\left(\left(\frac{91}{\zeta}-74+91\zeta\right)q+\cdots\right)w^2\\
&+\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Tki[6;3,27]\times \text{ある定数}\\
=\ &\left(\left(\frac{1}{\zeta}-2+\zeta\right)q^2+\left(-\frac{2}{\zeta^2}+4-2\zeta^2\right)q^3+\cdots\right)w\\
&+\left(\left(\frac{1}{\zeta}-2+\zeta\right)q+\left(\frac{1}{\zeta^3}+\frac{\frac{3}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\zeta^2}+\cdots\right)q^2+\cdots\right)w^2\\
&+\cdots
\end{aligned}
$$

また, non-cusps は3次元分見つかっている．構成できたnon-cuspsはさらに多くあるが, 独立でないものを除くと3つしか残らなかった．それらの3つの取り方は色々あるが, 環の構造を意識して, 例えばweight 2のnon-cuspの3乗である$(L_5(f_{2,1}))^3$, weight 2のnon-cuspとweight 4のnon-cuspの積である$L_5(f_{2,1})\times L_5(E_2 f_{2,1})$, $E_2^2 f_{2,1}$のlifting$L_5(E_2^2 f_{2,1})$ を取ることができる．

$$
\begin{aligned}
&(L_5(f_{2,1}))^3\\
=\ &\frac{1}{216}+\frac{q}{12}+\frac{3q^2}{4}+\frac{13q^3}{3}+\frac{217q^4}{12}+\frac{697q^5}{12}+\cdots\\
&+\left(\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{12\zeta^2}+\frac{1}{6\zeta}+1+\frac{\zeta}{6}+\frac{\zeta^2}{12}\right)q+\cdots\right)w\\
&+\left(\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{\zeta^2}+\frac{5}{2\zeta}+\frac{13}{2}+\cdots\right)q+\cdots\right)w^2\\
&+\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&L_5(f_{2,1})\times L_5(E_2 f_{2,1})\\
=\ &-\frac{31}{360}-\frac{7q}{20}+\frac{19q^2}{20}+\frac{73q^3}{5}+\frac{1351q^4}{20}+\cdots\\
&+\left(-\frac{7}{20}+\left(-\frac{7}{20\zeta^2}-\frac{7}{10\zeta}+3-\frac{7\zeta}{10}-\frac{7\zeta^2}{20}\right)q+\cdots\right)w\\
&+\left(\frac{19}{20}+\left(\frac{3}{\zeta^2}+\frac{39}{10\zeta}+\frac{189}{10}\cdots\right)q+\cdots\right)w^2\\
&+\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&L_5(E_2^2 f_{2,1})\\
=\ &\frac{781}{126}+q+33q^2+244q^3+1057q^4+q^5+\cdots\\
&+\left(1+\left(\frac{1}{\zeta^2}+\frac{2}{\zeta}+12+2\zeta+\zeta^2\right)q+\cdots\right)w\\
&+\left(33+\left(\frac{12}{\zeta^2}+\frac{30}{\zeta}+78+\cdots\right)q+\cdots\right)w^2\\
&+\cdots
\end{aligned}
$$

4.5　k=8以上　$k=8$の保型形式の次元は22であり, そのうちcuspsが13次元である．現在までにcuspsが11次元分, non-cuspsが5次元分決定できている．これ以上のweightを持つ保型形式についても計算を進めている．

5.　最後に

現段階ではまだ$\Gamma_0^{(2)}(5)$の保型形式環の全体像をとらえられる状況には至っていないが, 徐々に計算は進められている．

ところで計算には計算機上でmathematicaをソフトとして使用しているが, 本来, 無限和であるものをかなりの次数まで計算しているため, 相当な計算時間を要する．実際, この論文にある程度の低いweightのものでも計算に数時間以上かかったものもあるため, 今後weightが高くなれば1つの保型形式の計算に日単位の時間がかかることが予想される．より効率的な計算方法を模索すると共に, 環の構造を考えることによって計算量を減らせるように工夫してゆきたい．

参考文献

(1) M.Eichiler, D.Zagier : “The Theory of Jacobi Forms”, Progress in Mathematics , Vol.55 , 1985.

(2) E.Freitag : “Siegelsche Modulfunktionen” , Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 254. Springer-Verlag , Berlin , 1983.

(3) 伊吹山知義 : 「Siegel保型形式入門と保型形式環」, 第1回保型形式周辺分野スプリングコンファレンス報告集「保型形式環」, pp.1-42 , 2002.

(4) T.Ibukiyama : “Saito-Kurokawa liftigs of level N and practical construction of Jacobi forms”, Kyoto Journal of Mathematics, Volume 52 , Number 1 , pp.141-178 , 2012