数学記号

八木善彦*

Mathematical Symbols

Yoshihiko YAGI*

Keywords: mathematics , education, symbols

1. はじめに

$\sqrt{a}$ は英語では square root of a と読み [1]、訳すと a の平方根になる. a の平方根は $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$ との２つであり, $\sqrt{}$ は根号 (radical symbol, root sign) という. 平方根は $a = b^2$ となる b のことである. 一意性のないため「平方根の記号」はない. 根号を使って２つある平方根を表すことになる. ただし, この概念が意味を持つかどうかということを含め, さまざまな点で差異が生じるということに注意が必要である [2].

数学で使用される記号は, 記号の見た目やその文脈における意味, あるいは記号の由来など様々な状況で決まり, 使用される人の集団によって, 異なるものが用いられたりする. 「記号」と「読み」との間には相関性を見いだせず, 分けて考えるのが妥当である.

学習指導要領には, 数学学習における用語・記号の重要性として

> 用語・記号は, 社会・文化で共通に認められた内容を簡潔に表現し, それらを的確に使うことによって, 思考が楽になり, コミュニケーションが能率的になる。数学においては, 特に記号が大きな役割を果たしている。記号は抽象的で形式的であるだけに, 操作がしやすく, しかも, より一般性を持っている。上手に記号体系を作ることにより, 現実の意味を離れて形式的な操作が可能になり, 思考を能率的に進めることができるようになるのである。このように, 数学において用語や記号の使い方に慣れることによって, 思考を, より正格に, より的確に, より能率的に行うことができ, 社会や文化の発展に貢献する人間を育てることができる。

とある [3].

用語・記号は意味, 簡潔さ, 明瞭さが十分である必要がある. 特に, 日常生活で使われる用語と同じ言葉であるのに, 数学で使用する場合には意味が異なることもある.

数学記号が用いられたときその式をどう読むか, 数学記号の名は何かということが, それを慣用的に用いる世界によって異なるのである. 高等学校 (高専低学年) の授業で用いられる数学記号とその呼び名や使い方に関する話題等についてまとめる.

2. 数学記号について

2.1 意味を使う

数式を読み下す場合, その意味を使う場合がある. 以下は, 意味で読み下す例をあげる. この場合, 記号名は意識されない.

$a \times b$　a かける b　$\times$　乗算記号
$a \cdot b$　a かける b　$\cdot$　乗算記号, 中点
$a \div b$　a わる b　$\div$　除算記号
a/b　a わる b　$/$　除算記号, スラッシュ
$n!$　n の階乗　$!$　階乗記号, 感嘆符
$\log_a b$　a を底とする b の対数　log　対数記号
$a \in A$　a は集合 A の要素　$\in$　要素記号
(英語では a is an elment of A)
$A \ni a$　a は集合 A の要素　$\ni$　要素記号
(英語では A contains a)
$\in, \ni$ の記号名は, Mathematica[4, p.972] では
$\in$　*element*,　$\ni$　*reverse element* とよぶ.
$A \subset B$　A は B の部分集合　$\subset$ subset
$B \supset A$　A は B の部分集合　$\supset$ superset
ただし, 部分集合の記号は, 部分集合・真部分集合の記号で混乱がある. さらに $\subset, \supset, \subseteq, \supseteq, \subseteqq, \supseteqq$ など使用するテキストの流儀によるので, 注意が必要である.

$\sqrt{a}$ は, 最初に述べたように, 英語では square root of a と読み直訳すれば a の平方根となるが, 平方根と $\sqrt{a}$ は異なる概念なので日本ではルート a とよぶ. した

*一般科　教授

がって, $\sqrt[n]{a}$ は, the nth root of a の直訳 a の n 乗根ではなく, n 乗根ルートとよぶ. 教科書には, このような記述はない.

2.2 読み方の違い

分数は英語では分子から分母と読んでいくが日本では分母から分子へ読む.

$\dfrac{a}{b}$　　a over b　　b ぶんの a

微分記号では日本でも上から下へ読み下す.

$\dfrac{dy}{dx}$　　dy over dx　　ディy ディx

なお, 偏微分の ∂ は通常ディと読む. 偏微分を強調するときはラウンド ディ, パーシャル ディとよぶ.

$\dfrac{\partial y}{\partial x}$　　dy over dx　　ディy ディx (通常)

$\dfrac{\partial y}{\partial x}$　round dy over round dx,
ラウンド dy ラウンド dx

意味で読み下せば「y の x による偏微分」となり記号で読むより長くなる.
(the partial derivative of y with respect to x)
記号で読んだ場合は, 聴いている人が同じ数式を見ている条件が無いと意味が曖昧になる可能性がある.

さらに ∂ でも境界を表す場合もある.

∂D　　D の境界　　*boundary of D*

2.3 記号の違い

同じ意味の記号でも教科書により表記の異なるものがある [5][6][7][8].

逆三角関数
$\sin^{-1} x$,　$\mathrm{Sin}^{-1} x$,　$\arcsin x$　など三角関数すべて

行列
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,　$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

転置行列
${}^{\mathrm{t}}A$,　A^{t},　A^{T}

同値
$\leftrightarrow$,　$\leftrightarrows$,　$\Leftrightarrow$,　iff

不等
$\neq$,　$\mathrel{=\!\!\!\!|}$,　$\mathrel{=\!\!\!\!\backslash}$,　$<>$

記号が同じようであっても意味の異なる場合がある.
ならば
$\rightarrow$,　$\Rightarrow$,　$\Longrightarrow$
「p ならば q $(p \rightarrow q)$」が真のとき「$p \Rightarrow q$」と表す [6].
「p ならば q」を「$p \Longrightarrow q$」と表す [5][7].

ランダウの O-記法も関数を級数展開したときの値の変動のおおよその評価を与えるための記法であるが, o, Ω, ω, Θ といった類似記法が定義され, 教科書により微妙な問題となる.

3. ブラックボード・ボールド

ベクトルを表すときに $\vec{a}$ のように文字の上側に矢印をつけるが [5][9][10], $\boldsymbol{a}$ のように太字にする [5] 流儀がある.

この太字を黒板に書くときにチョークで塗りつぶすのが面倒なため黒板用に太字を表す表記ができた. それを黒板太字体 (ブラックボード・ボールド) とよぶ. その書体は整数の集合 ($\boldsymbol{Z}, \mathbb{Z}$) や実数の集合 ($\boldsymbol{R}, \mathbb{R}$) を表すシンボルとして使われるようになり新しく記号となった.

$\mathbb{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$

もともとは省力化のために作られた記法のため, 二重線にする部分や二重線にする位置をめぐって異字体が出現することになる. ベクトルを表す場合の小文字のブラックボード・ボールドは AMSFonts package (AMS. アメリカ数学会 American Mathematical Society) にも含まれていないため, なおさらである.

abcdefghijklmnopqrstuvwxyz

斜体や筆記体になれば, 誰が定義するのでしょう.

数学の世界ではこのように日々, 新しい記号が発明されている.

4. 記号の抽象性

記号を使用することで抽象化が促進される. それは, 操作がしやすくなり, しかも, より一般性を持っているからである.

関数 $y = f(x)$ において, $f(a)$ は関数の $x = a$ のときの値として定義される. ところが, いつのまにか定数 a は変数に変じて

$$偶関数 \Leftrightarrow f(-x) = f(x) \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&x\text{軸方向}\ p,\ y\text{軸方向}\ q\ \text{の平行移動}\\&\quad\Leftrightarrow y = f(x-p)+q\end{aligned} \tag{2}$$

のように使用され, 概念は抽象性を獲得していく．２次関数 $y = f(x)$ であったものが, ４次関数 $y = f(x^2)$ になったり, $y = f(x)$ のときの $f(y)$ のような再帰的定義を考えたりできる. 定理や命題をすべて論理記号で表し, 論理記号を素数に置き換えて関数計算を行うことにより, 論理の完全性を証明したり,（有限の公理からは）証明不可能な定理が存在することが証明できる.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+\cdots \tag{3}$$

は無限大に発散する. ところが, ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots \tag{4}$$

を使って $s = -1$ や $s = 0$ を計算すると,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = 1+2+3+\cdots = -\frac{1}{12} \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0}} = 1+1+1+\cdots = -\frac{1}{2} \tag{6}$$

となる. これは荒唐無稽な話ではなく, 朝永 振一郎博士がノーベル賞をもらった, 無限大の繰り込みという操作にあたる. 繰り込みは, 相対論・場の量子論とならぶ現代物理学が満たすべき基本原理となっている. 抽象化が進むと一見関係のないことの間につながりができ, あらたな関係が明らかになる.

5.　まとめ

高専の教科書間でも, 記号の使用法が異なる例が散見された. 高等学校までの教育ように, 国の学習指導要領で教えるべき記号や用法が設定され統一されればこのようなことは無いのかもしれないが, “≧”, “≦” のように外国と異なる記号で統一し国内で用いるのも, 国際化がさけばれる昨今には問題となろう. 不等の記号のように斜線の向きが異なるのも, 困ったことである. 気になり出すと夜も眠れなくなる. 高等学校の教育課程と同じ内容の分野でも記号や定義のぶれがあることが判明した. 本来, 記号の違いは, 物理と数学など分野が違えば当然あるわけで, 専門書のテキストが異なれば記号表記も異なることになる. 多数の専門教科に分かれていく高専の教育では, 色々な記号を場合場合で使い分けできるほうが有用であるのかもしれない.

6.　おわりに

数学の教育は, 記号を用いることによって抽象的思考の訓練を行う. 抽象的思考の中には, いままで前提としていた枠を超えて概念を適用し, 整合性を持つように調整する機能が含まれる. その意味では, 現在の数学の教育内容は不十分である. 本来, 解析学の分野では複素数を用いた計算が主流である. 電磁気学や量子力学でも複素関数を扱うのが普通である. 一方, 整数論などのように強い制限をかけて, その中で成立する真理を発見するのも数学である. 記号を用いて, 思索をめぐらせる人間を思い浮かべるとき, 人間の思考の不思議な側面を覗いたような気分になる.

サイエンス・ライターのマット・リドリーが「アイデアが交わるとき」[(12)] で述べているように 1 人では作れないプロダクト, 1 人の頭の中に入りきらない複雑な知識が, 分業化された個々の知識を共有することで生み出され, その世界全体の情報になっていく社会が生み出されようとしている. 役割分担・専門性ができて, 1 人の人間の頭では作れない複雑な概念が複数の人間の協働によって生み出せるというコンセプトだ. 記号というのは, この複雑な概念を複数の人間の協働によって生み出すことにおおきくかかわっている.

参考文献

(1) 小松勇作編:「数学 英和・和英辞典」, 共立出版株式会社, 1996.

(2) ウィキペディア:「平方根」 http://ja.wikipedia.org/wiki/平方根

(3) 文部科学省教育課程課:「中学校学習指導要領解説 数学編」, 教育出版, 2008.

(4) S.Wolfram:「The Mathematica Book, Fifth Edition」,Wolfram Mdia, 2003.

(5) 田代嘉宏, 難波完爾編:「新編 高専の数学 1,2,3（第２版）」, 森北出版株式会社,1990.

(6) 高遠節夫, 斉藤斉編:「新訂 基礎数学」, 大日本図書株式会社,2003.

(7) 岡本和夫監修:「新版 基礎数学」, 実教出版株式会社,2010.

(8) 矢野健太郎, 石原繁編:「基礎の数学（改訂版）」, 裳華房株式会社,1989.

(9) 高遠節夫, 斉藤斉:「新訂 線形代数」, 大日本図書株式会社,2003.
(10) 岡本和夫:「新版　線形代数」, 実教出版株式会社,2011.
(11) ウィキペディア:「朝永振一郎」
http://ja.wikipedia.org/wiki/朝永振一郎
(12) Matt Ridley : TED「アイデアが交わるとき」
http://www.nhk.or.jp/superpresentation/backnumber/121029.html