検索可能計画の構成と検索確率による比較

末次武明 *

Construction of Search Designs and Comparison of Designs Using Search Probabilities

Takeaki SUETSUGU*

ABSTRACT

This paper gives search designs for 2^m factorials when effects are searched in the two-factor or three-factor interactions. For a certain design T_1, we consider the problem of finding a design T_2 are presented so that the design $T = T_1 + T_2$ is a search design with the above property, where "+" stands for a union of two designs. And then, we define the search probability and try to compare search designs using search probabilities.

Keywords: search design, two levels, search probability

1．はじめに

Srivastava[(1)] の検索可能計画に対する先駆的な研究以来，この計画に対する研究は，さまざまな統計モデルの下で行なわれてきた．その中でも，筆者達が手がけた次のような一連の検索可能計画の構成と検索確率による検索可能計画の比較の結果をまとめたい．(ページ数の都合で，定理の詳細な証明は省く)

まず，2^m 要因計画を考え，T_1 をある決まった計画とするとき，$T = T_1 + T_2$（"+" は２つの計画の並置）が次の各条件を満たすような計画の構成について考える．

(a) ２因子 (と３因子) 交互作用から高々１個の未知効果が検索でき，主効果と共に推定可能である．(MEP.1 計画 と名付ける)

(b) ２因子交互作用から高々２個の未知効果が検索でき，主効果と共に推定可能である．(MEP.2 計画 と名付ける)

(c) ２因子交互作用から高々３個の未知効果が検索でき，主効果と共に推定可能である．(MEP.3 計画 と名付ける)

(d) ２因子と３因子交互作用から高々２個の未知効果が検索でき，主効果と共に推定可能である（ただし，３因子交互作用からの未知効果は高々１個しか含まない）．(MEP.2(1;1) 計画 と名付ける)

その後，検索可能計画で，未知母数がどの程度本当に検索できるかを調べる為に検索確率を定義し，(a), (b) の場合に絞って，検索確率をシミュレーションによって計算して，検索可能計画を比較することを考える．

* 一般科 教授

2．準備

次のような線形モデルを考える．

$$\mathbf{y} = A_1\boldsymbol{\xi_1} + A_2\boldsymbol{\xi_2} + \mathbf{e} \tag{1}$$

ただし，$\mathbf{y}(N\times 1)$ は観測値ベクトル，$A_i(N\times \nu_i)$ は計画行列 $(i=1,2)$，$\boldsymbol{\xi_i}(\nu_i\times 1)$ は母数ベクトル $(i=1,2)$，$\mathbf{e}(N\times 1)$ は誤差ベクトルで $N(\mathbf{0},\sigma^2 I_N)$ に従う．ここで σ^2 は誤差分散，I_N は大きさ N の単位行列である．

特に，モデル (1) において，$\boldsymbol{\xi_1}$ のすべての要素は未知で，$\boldsymbol{\xi_2}$ の中に，どれか分からないが高々 k 個の未知母数が含まれ，残りは 0 である（k は大きくない既知の正の整数）場合を考える．

基本定理 (Srivastava[(1)])　$\boldsymbol{\xi_2}$ の高々 k 個の未知母数が検索可能かつ $\boldsymbol{\xi_1}$ と共に推定可能である必要条件は，A_2 のすべての $N\times 2k$ 部分行列 A_{20} に対して，次の等式が成り立つことである．

$$rank(A_1 : A_{20}) = \nu_1 + 2k \tag{2}$$

特に，誤差がない $(\sigma^2=0)$ 場合には十分条件になる．条件 (2) を満たす計画を 検索可能計画という．

次に，m 個の因子 $F_1,...,F_m$ をもつ 2^m 要因計画を考える．処理組合せは，j 番目の因子のレベル $t_j = 0$ or 1 $(1\le j\le m)$ である $(t_1,\ ...,\ t_m)$ で表される．T を，各行がそれぞれ処理組合せを表す $N\times m$ 行列だとする．

そのとき，２因子交互作用（３因子交互作用）まで考えると，T に対する計画行列は，次のように与えられる．

$$[\mathbf{1}_N, \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_m, \mathbf{g}_{12}, \mathbf{g}_{13}, ..., \mathbf{g}_{m-1\,m} \\ (, \mathbf{g}_{123}, \mathbf{g}_{124}, ..., \mathbf{g}_{m-2\,m-1\,m})]$$

但し，正の整数 N に対して，$\mathbf{1}_N$ は全ての要素が 1 である $N \times 1$ ベクトルで，一般平均に対応している．$\mathbf{g}_j$ $(1 \leq j \leq m)$ は j 番目の主効果を，$\mathbf{g}_{ju}$ $(1 \leq j \leq u \leq m)$ は j 番目と u 番目の２因子交互作用に，$\mathbf{g}_{jkl}$ $(1 \leq j \leq k \leq l \leq m)$ は j 番目と k 番目と l 番目の３因子交互作用にそれぞれ対応している．

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_j &= 2\mathbf{t}_j - \mathbf{1}_N, \quad 1 \leq j \leq m, \\ \mathbf{g}_{ju} &= \mathbf{g}_j * \mathbf{g}_u, \quad 1 \leq j < u \leq m, \\ (\mathbf{g}_{jkl} &= \mathbf{g}_j * \mathbf{g}_k * \mathbf{g}_l, \quad 1 \leq j < k < l \leq m) \end{aligned} \tag{3}$$

ここで，$\mathbf{t}_j$ は T の j 番目の列で，$*$ はアダマール積を表す．

このとき，基本定理は次のように表される．

定理１ T が MEP.k 計画 $(k = 1,\ 2,\ 3)$ である為の必要条件は，$s \neq s'$ なら $1 \leq p_s < q_s \leq m$, $(p_s, q_s) \neq (p_{s'}, q_{s'})$ であるそれぞれの (p_s, q_s), $1 \leq s \leq 2k$ の選び方に対して，行列

$$G = [\ \mathbf{1}_N, \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_m, \mathbf{g}_{p_1q_1}, \mathbf{g}_{p_2q_2}, \mathbf{g}_{p_3q_3}, \mathbf{g}_{p_4q_4} (, \mathbf{g}_{p_5q_5}, \mathbf{g}_{p_6q_6})(, \mathbf{g}_{r_1s_1t_1}, \mathbf{g}_{r_2s_2t_2})\ ]$$

が

$$rank\, G = m + 1 + 2k \tag{4}$$

であることである．特に，誤差がない場合は，十分条件になる．

ここで，Mukerjee and Chatterjee[2] で注意しているように，２因子交互作用までしか考えていないときは，$\mathbf{t}_{ju} = \mathbf{t}_j * \mathbf{t}_u$ とするとき，

$$U = [\ \mathbf{1}_N, \mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_m, \mathbf{t}_{p_1q_1}, \mathbf{t}_{p_2q_2}, \mathbf{t}_{p_3q_3}, \mathbf{t}_{p_4q_4} (, \mathbf{t}_{p_5q_5}, \mathbf{t}_{p_6q_6})\ ] \tag{5}$$

とすると，rank G = rank U であることが示されるので，(4) の条件を，計画行列の代わりに T から直接作った U を使って調べることができる．

３．MEP.1 計画 の場合

これから，2^m 要因計画を考え，T_1 : ある計画とするとき，$T = T_1 + T_2$（“+” は２つの計画の並置）が MEP.1 計画であるような３種の計画の構成の結果を示していくが，前の２つの場合は，既に研究紀要第 47 号 (末次 [3]) で紹介したので，簡単に結果をまとめるだけにする．

これから，$\Omega(m, j)$ は，１の数が j $(j = 0, ..., m)$ であるような処理組合せ全てから成る $\binom{m}{j} \times m$ 行列を表すことにする．

３．１ $T_1 = (\Omega(m, 0)', \Omega(m, 1)')'$ で $\boldsymbol{\xi_2}$ が２因子交互作用からのとき

Shirakura[4] の結果を踏まえて研究した場合で，できるだけ T_2 の処理組合せの数 N_2 が小さくなる構成を探った．Shirakura[4] の Table 2 $(3 \leq m \leq 10)$ に対し，それより大きい $11 \leq m \leq 15$ に対して，T_2 の N_2 を最小にする計画を構成した．

次の表 1 に結果をまとめているが，Shirakura[4] にならい，N_2 の最小値を $g(m)$ としている．また，${N_2}^*$ は $2^{N_2} - 2 \geq m(m-1)/2$ を満たす N_2 の最小値で $g(m)$ の 1 つの下限であり，$g^*(m) = m - 1 (m > 3)$ は $g(m)$ の 1 つの上限である．

表 1　N_2 の最小値 $g(m)$ $(11 \leq m \leq 15)$

m	${N_2}^*$	$g(m)$	$g^*(m)$
11	6	8	10
12	7	8	11
13	7	9	12
14	7	10	13
15	7	10	14

特に，系統的な構成の例としては，証明は省くが，4.1.1 節の LC タイプから $(0, \ldots, 0)'$ の列を除いた計画 W^* を T_2 に用いると，MEP.1 計画になることが示される．

例） 3.3 節の例 1 を参照

３．２ $T_1 = (\Omega(m, 0)', \Omega(m, m-1)', \Omega(m, m)')'$ で $\boldsymbol{\xi_2}$ が２因子・３因子交互作用からのとき

Ghosh[5], Ohnishi,Shirakura[6] の結果を踏まえて研究した場合で，できるだけ T_2 の処理組合せの数 N_2 が小さくなる構成を探った．

Ohnishi,Shirakura[6] が T_2 の処理組合せの数 N_2 の最小値を，$3 \leq m \leq 8$ まで調べているので，それより大きい $9 \leq m \leq 13$ まで調べた結果を次の表２にあげている．

表２　N_2 の最小値 $l(m)$ $(9 \leq m \leq 13)$

m	N_1	$l(m)$	N
9	11	10	21
10	12	11	23
11	13	11	24
12	14	12	26
13	15	13	28

特に，系統的な構成の例としては，Hadamard 行列から $(1, \cdots, 1)$ の 1 行と $(1, \cdots, 1)'$ の 1 列を除いた行列 H^* を T_2 に用いると，MEP.1 計画になることが示される．(証明は省く)

例） 5.2 節の例 9 を参照

3．3 $T_1 = (\Omega(m,0)', \Omega(m,1)')'$ で $\boldsymbol{\xi_2}$ が２因子・３因子交互作用からのとき

この節では，線型モデル (1) で，$\boldsymbol{\xi_2}$ を２因子交互作用と３因子交互作用からとするとき，

$$T_1 = (\Omega(m,0)', \Omega(m,1)')' \qquad (6)$$

を考え (処理組合せの個数 $N_1 = m+1$)，T_2 を併置して，MEP.1 計画 を構成する問題を考える．

まず，T_2 が MEP.1 計画 になる必要十分条件を考え直してみる．

T_1 に対する計画行列は２因子交互作用に対応する２列，３因子交互作用に対応する２列を取ると，例えば，次のようになる．

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|cc|cc}
1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline
1 & 1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & \ldots & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & \ldots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1
\end{array}\right)$$

行の基本変形で

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|cc|cc}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ \hline
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)$$

さらに，$\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{g}_{ij} + \mathbf{g}_i + \mathbf{g}_j + \mathbf{1}$, $\mathbf{c}_{ijk} = \mathbf{g}_{ijk} - \mathbf{g}_i - \mathbf{g}_j - \mathbf{g}_k - \mathbf{2}$ とすると，２因子交互作用に対応する列は $\mathbf{c}_{ij}$ で，３因子交互作用に対応する列は $\mathbf{c}_{ijk}$ で置き換える（列の基本変形）と，次のように変形される．

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|cc|cc}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

以上のことから，次の定理が導かれる．

定理 ４ (6) の T_1 について，$T = T_1 + T_2$ が MEP.1 計画 である必要十分条件は，T_2 からの計画行列で，$1 \le i < j \le m$, $1 \le p < q < r \le m$ を満たす任意の i, j と p, q, r について，$\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{g}_{ij} + \mathbf{g}_i + \mathbf{g}_j + \mathbf{1}$, $\mathbf{c}_{pqr} = \mathbf{g}_{pqr} - \mathbf{g}_p - \mathbf{g}_q - \mathbf{g}_r - \mathbf{2}$ を考えるとき，どの２つのベクトルも $\mathbf{0}$ でなく，互いに異なることである．

例えば，証明は省くが，定理４を用いて，T_2 に 4.1.1 節の LC タイプから $(0, \ldots, 0)$ の列を除いた計画 W^* を用いると，MEP.1 計画になることが示される．

（前節で，W^* が，$\boldsymbol{\xi_2}$ を２因子交互作用だけからとした場合の T_2 になることを示したが，さらに，$\boldsymbol{\xi_2}$ を２因子・３因子交互作用からとしても，検索できることが分かった.）

例 1) $m = 7$ に対する T_2 は次のように表される．

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline
(1,0,0) & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
(0,1,0) & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
(0,0,1) & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
(1,1,0) & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
(1,0,1) & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
(0,1,1) & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

４．**MEP.2** 計画 の構成

この章では，T_1 をある決まった計画とするとき，$T = T_1 + T_2$（“+” は２つの計画の並置）が MEP.2 計画になるような T_2 を構成することを考える．但し，検索する未知母数は２因子交互作用からとする．

４．１ $T_1 = (\Omega(m,0)', \Omega(m,1)', \Omega(m,m-1)')'$ のとき

この節では，T_1 を weight(1 の数) が $0, 1, m-1$ の処理組合せを全部集めた計画とするとき，$T = T_1 + T_2$（“+” は２つの計画の並置）が MEP.2 計画になるような T_2 を構成する．

この問題は Mukerjee and Chatterjee[(2)] が Hadamard 行列を T_2 に応用することで，MEP.2 計画を構成したことから，研究が始まっている．

上記の条件 (4) をこの構成の場合に考えて，次の定理を得る．

定理 2 上記の T_1 について，$T = T_1 + T_2$ が MEP.2 計画になる必要十分条件は，$\{1, 2, \ldots, m\}$ からの異なる整数 a, b, c, d のどんな組合せに対しても，$t_a \ne t_d$ かつ $t_b \ne t_c$ である処理組合せ $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ が T_2 に存在することである．

次の定義は，定理 2 を満たす T_2 の組合せ的性質を調べていくときに大切な役割を演じる．

定義 D を $n \times m$ の $(0,1)$ 行列だとするとき，D が n 行，m 列の **ST** 配列(ST 配列 (n, m)) であるのは，D のどの４列を取っても，$\binom{1}{1}, \binom{1}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{0}$ が全て含まれているような 2 行が存在することである．

注）上記の定義は，次のように言い換えられる．

「どの４列でも，同じでなく complement でもない weight 2 の行が必ず２行存在する」

例２）　ST 配列 (4, 6)

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

定理 3　先に定義した計画 T_1 について，$T = T_1 + T_2$ が MEP.2 計画になる必要十分条件は，T_2 が ST 配列 (N_2, m) であることである．

ST 配列は，次の３種類の構成が考えられている．
（Shirakura,Suetsugu and Tuji[7] による）

4.1.1 ST 配列の構成 (1)　　＜ＬＣタイプ＞

r が３以上の整数のとき，各成分が $0, 1$ である r-次元の点 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ を考える．$n = r(r+1)/2$ とするとき，$n \times 2^r$ 行列 W を次のように決める．列は，$(0, \ldots, 0)$ から始まる上記の全ての r-次元の点でラベルづけられているとする．行は，成分中の１の数が１か２であるような点 $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ でラベルづけられているとする．このとき，B 番目の行で A 番目の列の W の要素は次のように与えられる．

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \beta_i \pmod 2$$

定理 4　$r \geq 3$ で $n = r(r+1)/2$ とする．上記のように定義した行列 W は ST 配列 $(n, 2^r)$ である．

例３）　$r = 3$ に対する ST 計画 $(6, 8)$: W は次のように表される．

$$\begin{array}{c|cccccccc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline (1,0,0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (0,1,0) & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ (0,0,1) & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ (1,1,0) & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ (1,0,1) & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ (0,1,1) & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

4.1.2 ST 配列の構成 (2)　　＜ＢＩタイプ＞

良く知られたパラメータ v, b, r, k, λ をもった釣合い不完備ブロック計画 $BIBD(v, b, r, k, \lambda)$ を利用する．$M'(v \times b)$ が $BIBD(v, b, r, k, \lambda)$ の生起行列だとすると，次の定理が成り立つ．

定理 5　$M(b \times v)$ の，どの４列を取った部分行列にも weight 2 の行が少なくとも１つ含まれていれば，M からどれか１行を除いた M^* は ST 配列 $(b-1, v)$ である．

注）定理５で，M も，ST 配列である．

例４）　BIBD$(7, 7, 3, 3, 1)$ から，最初の行を除くことで，次のような ST 配列 (6,7) が得られる．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4.1.3 ST 配列の構成 (3)　　＜ＱＲタイプ＞

標数が奇素数 p である有限体 $GF(p^n)$ に対して，0 でない要素 α は，$\alpha = \beta^2$ であるような要素 $\beta \in GF(p^n)$ が存在するとき，quadratic residue (Q.R.) であるという．

$1 \leq i, j \leq p^n$ で，ρ_i が $GF(p^n)$ の任意の元なら，$p^n \times p^n$ 行列 $V = \{v_{ij}\}$ を次のように定義する．

$i = j$ のときは　$v_{ij} = 0$,　$i \neq j$ のときは　$\rho_j - \rho_i$ が Q.R. なら $v_{ij} = 1$ で，Q.R. でないなら $v_{ij} = 0$

このとき，次の定理が成り立つ．

定理 6　$m = 4t + 1 = p^n$ (t は２以上の整数, p は素数, n は正整数) とするとき，上記のように定義した V は ST 計画 (m, m) になる．

例５）　$p = 3$ で $n = 2$ とすると，9×9 行列 V は次のように与えられる．

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

注）Mukerjee and Chatterjee[2] の場合は，3.2 節の場合と同様に，Hadamard 行列から $(1, \cdots, 1)$ の１行と $(1, \cdots, 1)'$ の１列を除いた行列 H^* を考え，さらにどれか１行を除いても ST 配列になる，ということになる．H^* は $m = 4t - 1$ の場合であり，QR タイプとよく似た構造をしていて，「HA タイプ」と呼ぶことにする．

４．２ $T_1 = (\Omega(m, 0)', \Omega(m, 1)')'$ のとき

この節では，T_1 を前節より小さい weight が $0, 1$ の処理組合せを全部集めた計画とするとき，$T = T_1 + T_2$ が MEP.2 計画になるようにするには，どんな T_2 を取ればよいか，という問題を考える．

このとき，$T = T_1 + T_2$ に対する (5) の行列 U は，T_2 の処理組合せの数を N_2，T_1, T_2 から２列ずつのアダマール積を取ったベクトルを並べた行列をそれぞれ T_{12}，T_{22} とすると，$T_{12} = O$ より，次のようになる．

$$U = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \mathbf{0}'_m & \\ \mathbf{1}_m & I_m & O \\ \hline \mathbf{1}_{N_2} & T_2 & T_{22} \end{array} \right) \qquad (7)$$

ただし，$\mathbf{0}_m$ は $m \times 1$ 零ベクトル，I_m は $m \times m$ 単位行列，$\mathbf{1}_m$ は 各要素が 1 の $m \times 1$ ベクトル，O は $(m+1) \times \binom{m}{2}$ 零行列だとする．

U の T_1 と一般平均に対応する部分行列の rank が $m+1$ で $T_{12} = O$ であることから，条件 (4) より，次の定理が導かれる．

定理 7　上記の T_1 について，$T = T_1 + T_2$ が MEP.2 計画になる必要十分条件は，上記の T_{22} から任意の 4 列を取った部分行列 T_0 のランクが 4 であることである．

○ T_2 が BI タイプのとき

T_2 に 会合数が 2 以上の BIBD を転置した行列（BI タイプ）を用いると，$T = T_1 + T_2$ が MEP.2 計画になるのでは，と考えて，探求した結果，$m \le 12$ では，次のような場合に MEP.2 計画になることが分かった．

（ BIBD が $\Omega(m, j)$ である場合は除く）

BIBD(6,10,3,5,2)　　BIBD(8,14,4,7,3)
BIBD(9,12,6,8,5)　　BIBD(9,18,4,8,3)
BIBD(9,18,5,10,5)　　BIBD(10,30,7,21,14)
BIBD(11,55,3,15,3)　　BIBD(11,55,4,20,6)
BIBD(12,22,6,11,5)　　BIBD(12,33,4,11,3)
BIBD(12,44,3,11,2)

一方，次の場合には，MEP.2 計画にならない．

BIBD(7,7,4,4,2)　　BIBD(10,15,4,6,2)
BIBD(10,18,5,9,4)　　BIBD(10,30,3,9,2)
BIBD(11,11,5,5,2)

例 6）　BI タイプ　$(m = 9)$　:　BIBD(9,12,6,8,5)

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&0&0&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&1&1&0&1&1 \\ 1&0&1&1&0&1&1&0&1 \\ 1&1&0&1&1&0&1&1&0 \\ 0&1&1&1&0&1&1&1&0 \\ 1&0&1&1&1&0&0&1&1 \\ 1&1&0&0&1&1&1&0&1 \\ 0&1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&1&1&1&0 \\ 1&1&0&1&0&1&0&1&1 \end{bmatrix}$$

だから，一般的に，会合数が 2 以上の BIBD を転置した行列（BI タイプ）が T_2 になる訳ではないが，上記の例 BIBD(9,12,6,8,5) の場合のように，前節で構成した MEP.2 計画よりずっと処理組合せが少ない MEP.2 計画が構成できた．
(BIBD(9,12,6,8,5) の場合は $N = 1 + 9 + 12 = 22$ で，前節のＱＲタイプの場合は $N = 1 + 18 + 9 = 28$)

また，これだけで T_2 にならない場合でも，次のようにして，T_2 を構成できる場合がある．

例 7）BIBD(10,18,5,9,4) のときは，例えば，0101010101 という行を加えると T_2 になる．

（この場合は $N = 1{+}10{+}19 = 30$ で，前節の LC タイプ 10×16 から 6 列を除いた場合は $N = 1{+}20{+}10 = 31$）

例 8）　BIBD(7,7,4,4,2), BIBD(11,11,5,5,2) のときは，0,1 を反転した行列を付加すると T_2 になる．

5．MEP.3 計画 の場合

MEP.3 計画 は，T_1 : weight が $0, 1, m-1$ の処理組合せを全部集めた計画で 2 因子交互作用から高々 3 個の未知効果が検索でき，主効果と共に推定可能であるような検索可能計画なので，4.1 節の MEP.2 計画と同様の議論ができる．

5．1　T_1 の取り方から言えること

MEP.2 計画 のときと同様，まず，T_1 とそれから導かれる U_1 を考え，rank U_1 が $m + 1 + 6$ になるかどうかを探っていく．それには，

$$V_1 = (\mathbf{e}_{p_1 q_1}\ \mathbf{e}_{p_2 q_2}\ \mathbf{e}_{p_3 q_3}\ \mathbf{e}_{p_4 q_4}\ \mathbf{e}_{p_5 q_5}\ \mathbf{e}_{p_6 q_6})$$

の rank が 6 になるかどうかだけを調べればよいことがすぐに分かる．但し，$\mathbf{e}_{ij}$ は，i, j 成分が 0，他の成分は 1 のベクトルである．

さらに，$p_1, q_1, \sim, p_6, q_6$ の選び方を考えると，同型でないものは 68 種類が考えられ，そのうち，V_1 の rank が落ちるのは 15 種類であることが示される．

各場合に T_2 で rank が落ちないようにする為に必要な条件を考えていくと，T_2 は，ST 配列であることと，次の各条件のいずれかを満たすことが必要であることが分かる．

・4 列条件：
「ある行列から任意の 4 列を取ると，その中に，
互いに等しくなく complement(01 反転) でもない，
weight 2 の 3 行が存在する．」

・5 列条件：
「ある行列から任意の 5 列を取った部分行列 W で，
どの列 $\mathbf{a}$ を考えても，
要素 $a_i = 0$ なら その行の weight が 3，
$a_i = 1$ なら その行の weight が 2
であるような第 i 行が W の中に存在する．」

・6 列条件：
「下記のように，2×3 の $(0, 1)$ 行列 A,B を定める．
ある行列の任意の 6 列を取った部分行列 W を考える．
W の任意の 3 列をまとめて，それに残りの 3 列を
まとめて加えた行列から 2 行を取った部分行列を W_0
とすると，$W_0 = [A : B]$ または $W_0 = [B : A]$ となるものを選ぶことができる．
A: 2 行は weight が 1 か 2 で，等しいか complement
B: どの 3 列も異なる行列 」

以上の条件を使って，次の定理が導かれる.

定理６　T_2 が ST 配列を含み，５列条件と６列条件を満たすか，４列条件と６列条件を満たせば，T_2 は MEP.3 計画 である.

５．２ MEP.3 計画 の例

残念ながら，MEP.3 計画になる T_2 を，定理の形で示すことはできなかったが，次のような２種の T_2 を構成した.

1)「T_2 が $m \times m$ の QR タイプまたは HA タイプ（但し，m は素数で 43 までを確かめている）のとき，$m =$ 7, 13, 19 以外は MEP.3 計画 である.」

例９）　m=11 のとき　（ＨＡタイプ）

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

2) ST-array からの構成（$m = 6,\ 7,\ 8$ のとき）

定理６から示唆されるように，Shirakura,Suetsugu and Tuji[7] に示した $m = 6,\ 7,\ 8$ のときの最小の ST-array にそれぞれ１行，３行，３行を付け加えて T_2 を構成できる.

例 **10**）　$T_2\,(9 \times 7)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

６．MEP.2(1;1) 計画 の場合

これから，T_1：weight が $0, 1, m-1$ の処理組合せを全部集めた計画で２因子と３因子交互作用から高々２個の未知効果が検索でき（但し，３因子交互作用からの未知効果は高々１個），主効果と共に推定可能であるような検索可能計画を考える.

６．１ MEP.2(1;1) 計画 になるための T_2 の条件

このとき，Srivastava[1] の基本定理に相当する次の定理が導かれる.

定理７　T が上記の計画であるための必要条件は，T の計画行列において，一般平均と各主効果に対応する $m+1$ 列と，２因子と３因子交互作用に対応する任意の４列（但し，３因子交互作用に対応する列は２列までしか選べない）から得られる部分行列を G とすると，

$$
\text{rank } G = m + 1 + 4 \tag{8}
$$

であることである．特に，誤差がない場合には十分条件になる.

これから，$T = T_1 + T_2$ が定理７の条件を満たすような T_2 を考えていくが，まず，各交互作用に対応する列からの４列の選び方には，次の３通りがある.

１）２因子交互作用に対応する列から４列を選ぶ場合

前の節で扱ったように，この場合に定理７を満たすような T_2 が ST-array であった.

２）２因子交互作用に対応する列から３列，３因子交互作用に対応する列から１列を選ぶ場合

この場合は，3.1 節と同様に，T_1 に対する計画行列の基本変形を考えて，２因子交互作用に対応する３列の独立性だけを考えれば良く，rank が落ちることはないことが示される.

３）２因子交互作用に対応する列から２列，３因子交互作用に対応する列から２列を選ぶ場合

この場合も，3.3 節と同様に，T_1 に対する計画行列の基本変形を考えて，rank が落ちないためには，３因子交互作用に対応する２列で rank が落ちなければよい．これを言い直すと，$\mathbf{c}_{ijk} = \mathbf{g}_{ijk} - \mathbf{g}_i - \mathbf{g}_j - \mathbf{g}_k$ を考えて，$\mathbf{c}_{ijk} \neq \mathbf{c}_{lmn}$（但し，$i, j, k$ と l, m, n には同じものがあっても良い）であればよい.

これを T_2 に戻して考えると，$\mathbf{c}_{ijk} \neq \mathbf{c}_{lmn}$ になるのは，T_2 の行の中で，次のような組合せの行があるときである.

$$
\begin{array}{ccc}
i\ j\ k & & l\ m\ n \\
weight: 0\ or\ 1 & \rightarrow & weight: 2\ or\ 3 \\
weight: 2\ or\ 3 & \rightarrow & weight: 0\ or\ 1
\end{array}
$$

以上のことから，T_2 からの３列で weight が 0 or 1 の行を「タイプ A」, weight が 2 or 3 の行を「タイプ B」とするとき，次の定理が導かれる.

定理８　上記の T_1 に対し，$T = T_1 + T_2$ が２因子と３因子交互作用から高々２個の未知効果が検索でき（但し，３因子交互作用からの未知効果は高々１個），主効果と共に推定可能であるための必要条件は，T_2 が ST-array であり，T_2 から任意に３列と３列を選んだ時，タイプ A － タイプ B の行があるか，または タイプ B － タイプ A の行があることである.

特に，誤差がない場合には十分条件になる.

T_2 として，次の２タイプで，定理８の条件を満たすことが示される．いずれの場合も，任意に３列と３列を取った時，タイプＡ－A，タイプＢ－Ｂの行しかないとすると,「どの４列でも，同じでなく complement でもない weight2 の行が必ず２行存在する」という ST-array の条件に矛盾することが示される．

1) LC タイプのとき

例） 3.2 節の例２）を参照．

2) BI タイプのとき

例 **11**） BI タイプ $(m=7)$

$$\begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&1&1&0&0 \end{bmatrix}$$

７．検索確率の比較

以下，T を検索可能計画とし，$\sigma^2>0$ の場合を考える．

$\boldsymbol{\zeta}(k\times 1)$ を $\boldsymbol{\xi_2}$ の未知母数ベクトル，$A_{20}(\boldsymbol{\zeta})$ は $\boldsymbol{\zeta}$ に対応する A_2 の $N\times k$ 部分行列とすると，(1) より，

$$\mathbf{y}=A_1\boldsymbol{\xi_1}+A_{20}(\boldsymbol{\zeta})\,\boldsymbol{\zeta}+\mathbf{e}$$

ここで,

$$A(\boldsymbol{\zeta})=[A_1:A_{20}(\boldsymbol{\zeta})],\ M(\boldsymbol{\zeta})=A'(\boldsymbol{\zeta})A(\boldsymbol{\zeta}),$$
$$Q(\boldsymbol{\zeta})=A(\boldsymbol{\zeta})M^{-1}(\boldsymbol{\zeta})A'(\boldsymbol{\zeta})$$

とおくと,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\xi_1}}\\ \hat{\boldsymbol{\zeta}}\end{bmatrix}=M^{-1}(\boldsymbol{\zeta})A'(\boldsymbol{\zeta})\,\boldsymbol{y},$$
$$\hat{\boldsymbol{y}}=A(\boldsymbol{\zeta})\hat{\boldsymbol{\theta}}=Q(\boldsymbol{\zeta})\,\boldsymbol{y}$$

となり，残差平方和は，以下で与えられる．

$$S_e^2(\boldsymbol{\zeta})=|\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}}|^2=\mathbf{y}'(I-Q(\boldsymbol{\zeta}))\mathbf{y} \qquad (9)$$

このとき，検索手順は，次のように与えられる．

$\mathbf{y}$ に対して,

(i) 全ての $\boldsymbol{\zeta}\subset\boldsymbol{\xi_2}$ に対して，$S_e^2(\boldsymbol{\zeta})$ を求める．

(ii) $S_e^2(\boldsymbol{\zeta})$ を最小にする $\boldsymbol{\zeta}^*(k\times 1)\subset\boldsymbol{\xi_2}$ を求める．

(iii) $\boldsymbol{\zeta}^*$ が求める未知母数ベクトルである．

このとき,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=M^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^*)A'(\boldsymbol{\zeta}^*)\boldsymbol{y}$$

である．

これから，検索確率を次のように考えて，定義する．

真のモデル：$\boldsymbol{\zeta}_0(k\times 1)\subset\boldsymbol{\xi_2}$ に対して,

$$\mathbf{y}=A_1\boldsymbol{\xi_1}+A_{20}(\boldsymbol{\zeta}_0)\,\boldsymbol{\zeta}_0+\mathbf{e}$$

とすると，理想的には，一意的に $\boldsymbol{\zeta}^*=\boldsymbol{\zeta}_0$ となること，すなわち，全ての $\boldsymbol{\zeta}(\neq\boldsymbol{\zeta}_0)\subset\boldsymbol{\xi_2}$ に対して,

$$S_e^2(\boldsymbol{\zeta_0}))<S_e^2(\boldsymbol{\zeta}) \qquad (10)$$

となることが望ましいが，誤差があるので，(10) が成り立つとは限らない．そこで，次の確率を考える．

$$P(\boldsymbol{\zeta_0})=Pr(\ S_e^2(\boldsymbol{\zeta_0})<S_e^2(\boldsymbol{\zeta}) \text{ for any } \boldsymbol{\zeta}(\neq\boldsymbol{\zeta_0})\subset\boldsymbol{\xi_2})$$
$$P=\min_{\boldsymbol{\zeta_0}\subset\boldsymbol{\xi_2}}P(\boldsymbol{\zeta_0}) \qquad (11)$$

この P を，検索確率（または検索力）という．

また，検索可能計画 (SD) T に対する検索確率を P_T とすると，２つの SD T_1, T_2 に対して,

$$P_{T_1}\geq P_{T_2}$$

であるとき，T_1 は T_2 より“より良い”という．

但し，(11) の検索確率を解析的に求めるのは難しいので，シミュレーションで求めていくことにする．だから，検索確率 (11) は，未知母数の大きさを決めて N 回，試行した中で，何回，$S_e^2(\zeta_0)$ が実際に最小になるかという割合を求め，$\boldsymbol{\zeta_0}$ のとり方のそれぞれについてその最小値を取ったものになる．

７．１ MEP.1 計画の検索確率による比較

これから，MEP.1 計画の検索確率を求めていくが，ρ は未知母数の真の大きさと誤差の標準偏差 σ の比 ($\rho=\frac{|\zeta_0|}{\sigma}$) であり，試行回数 N はいずれも 100000 回である．

7.1.1 検索する未知母数は２因子交互作用からの場合

次のような２種の検索可能計画について，検索確率を求めてみる．

タイプ１

タイプ１は，Shirakura and Tazawa[8] により次のように与えられる．

$$T=\begin{cases}(\Omega(4,0)':\Omega(4,1)':\Omega(4,3)')' & \text{for } m=4\\ (\Omega(m,1)':\Omega(m,m-1)')' & \text{for } m\geq 5\end{cases}$$

例 **12**） $(\Omega(6,1)':\Omega(6,5)')'$ ＜ 12×6 ＞

$$\begin{array}{cccccc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ \hline 1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&0&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1 \end{array}$$

注）タイプ１は，$\Omega(m,j)$ の処理組合せだけからなる ‘Simple Array’ と呼ばれる計画の１つである．

Simple Array については，どんな２因子交互作用が未知母数であっても検索確率は同じであることが示されるので，この計画に対する検索確率は，どれか１つの $\mathbf{a}_{pq}$ についての確率を計算すればよい．

表３　検索確率（タイプ１）

ρ	m = 5 $<10\times5>$	6 $<12\times6>$	7 $<14\times7>$	8 $<16\times8>$
1.0	0.69160	0.73189	0.74327	0.74279
1.5	0.91212	0.95564	0.96842	0.97275
2.0	0.98232	0.99601	0.99795	0.99840
2.5	0.99723	0.99933	0.99937	0.99937

タイプ２

タイプ２は，$T_1 = (\Omega(m,0)', \Omega(m,1)')'$ に，行列 T_2 を付加してできるだけ処理組合せの数の少ない MEP.1 計画を構成したものである．(3.1 節を参照)

例 13)　$(\Omega(6,0)', \Omega(6,1)')' + T_2$　$<12\times6>$

$$\begin{array}{cccccc}
0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1\\
\hline
1&1&1&0&1&0\\
1&0&1&1&0&1\\
1&1&0&1&1&0\\
1&0&1&0&1&1\\
1&1&0&1&0&1
\end{array}$$

表４　検索確率（タイプ２）

ρ	m = 5 $<10\times5>$	6 $<12\times6>$	7 $<14\times7>$	8 $<15\times8>$
1.0	0.52974	0.44748	0.38667	0.30270
1.5	0.74675	0.70467	0.69183	0.58656
2.0	0.85946	0.85048	0.88775	0.78474
2.5	0.91951	0.91929	0.96841	0.86228

結論

タイプ１はシンプルな計画ではあるが，ρ が小さくても検索確率がよい．それに比べるとタイプ２では，T_2 の部分で N_2 を小さくしようとして無理をしているのか，検索確率が良くない．

7.1.2 検索する未知母数は２因子・３因子交互作用からの場合

検索する未知母数は２因子・３因子交互作用からの場合として，3.2 節では，$T_1 = (\Omega(m,0)', \Omega(m,m-1)', \Omega(m,m)')'$ の場合に研究した結果を述べた．3.3 節では，$T_1 = (\Omega(m,0)', \Omega(m,1)')'$ の場合に研究した結果を述べた．どちらの場合も，構成の関心が，処理組合せ N を小さくすることに置いていたため，検索確率を比べるには，m, N がそろった計画が少ない．その為，各場合に典型的で，比較的比べやすい次の場合をあげるだけにする．

例 14)　$m=7$，$N=15$ である次の２つの MEP.1 計画を比較する．

・「Had−」は，3.2 節からの例で $T_1 = (\Omega(7,0)', \Omega(7,6)')'$ に HA タイプの T_2 を付加したものである．

($\Omega(7,7)$ の行は削除しても，MEP.1 であることが言える)

・「LC+」は，3.3 節からの例で，$T_1 = (\Omega(7,0)', \Omega(7,1)')'$ に，T_2 として，3.3 節の W^* に $N=15$ になるように１行 1101001 を付加したものである．

(この行は，各列の weight が同じになるように選んでいる)

$$\begin{array}{c}
\text{"Had−"} <15\times7> \\
\begin{array}{ccccccc}
0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&0\\
1&1&1&1&1&0&1\\
1&1&1&1&0&1&1\\
1&1&1&0&1&1&1\\
1&1&0&1&1&1&1\\
1&0&1&1&1&1&1\\
0&1&1&1&1&1&1\\
\hline
0&1&1&0&1&0&0\\
0&0&1&1&0&1&0\\
0&0&0&1&1&0&1\\
1&0&0&0&1&1&0\\
0&1&0&0&0&1&1\\
1&0&1&0&0&0&1\\
1&1&0&1&0&0&0
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{"LC+"} <15\times7> \\
\begin{array}{ccccccc}
0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1\\
\hline
0&0&0&1&1&1&1\\
0&1&1&0&0&1&1\\
1&0&1&0&1&0&1\\
0&1&1&1&1&0&0\\
1&0&1&1&0&1&0\\
1&1&0&0&1&1&0\\
\hline
1&1&0&1&0&0&1
\end{array}
\end{array}$$

次の表５に「Had−」と「LC+」の検索確率を与えているが，参考として，「Had」として「Had−」の１行を削除する前の SD について，「LC」として「LC+」の１行を付加する前の SD についての検索確率を与えている．

表５　検索確率

ρ	$Had-$ 15×7	$LC+$ 15×7	Had 16×7	LC 14×7
1.0	0.38869	0.32309	0.44046	0.16795
1.5	0.74440	0.64962	0.80205	0.30600
2.0	0.93192	0.88216	0.95499	0.48347
2.5	0.98719	0.97277	0.99161	0.65685
3.0	0.99763	0.99542	0.99824	0.79840
4.0				0.95342

結論

どちらも，$\rho=1$ のときは検索確率が低いが，$\rho=3$ 程度になると，よい検索確率になる．

ρ の値に関わらず，「Had−」の方が「LC+」より検索確率がよいことが伺える．

7．2 MEP.2 計画の検索確率による比較

MEP.2 計画についても，(11) の検索確率を解析的に求めるのは難しいので，シミュレーションで求めていくことにするが，シミュレーションを実行し易くする為に，検索確率を求める式を変形していく．

まず，残差平方和 S_e^2 は (9) で与えられていたが，さらに，

$$Q = A_1(A_1'A_1)^{-1}A_1'$$

と置くと，次のように変形される．

$$\begin{aligned} S_e^2 &= \mathbf{y}'[I - Q - (Q(\boldsymbol{\zeta}) - Q)]\mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}'[I - Q]\mathbf{y} - \mathbf{y}'[Q(\boldsymbol{\zeta}) - Q]\mathbf{y} \qquad (12) \end{aligned}$$

式 (12) の第１項は $\boldsymbol{\zeta}$ の取り方に依存しないので，第２項を $h(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{y}'[Q(\boldsymbol{\zeta}) - Q]\mathbf{y}$ とすれば，

$$S_e^2(\boldsymbol{\zeta_0}) < S_e^2(\boldsymbol{\zeta}) \Longleftrightarrow \; h(\boldsymbol{\zeta_0}) > h(\boldsymbol{\zeta})$$

である，$S_e^2(\boldsymbol{\zeta_0})$ が最小になることを確かめる代わりに $h(\boldsymbol{\zeta})$ が最大になることを確かめることができる．

シミュレーションでは，$\boldsymbol{\zeta_0} = (\zeta_1, \zeta_2)'$ とすると，ζ_1, ζ_2 をいろいろ変えて検索確率を求めていくことになるが，$|\zeta_1| = |\zeta_2|$ の場合を調べると傾向がつかめるので，以下の例ではこの場合のみをあげている．また，ζ_1 の大きさと誤差の標準偏差 σ との比を $\rho = |\zeta_1|/\sigma$ として，ρ が 1.0〜2.4 の範囲を示す．ただし，試行回数は $m \leqq 9$ のときは 10000 回である．

次のような各種の MEP.2 計画 について，検索確率を求める．但し，検索する未知母数は２因子交互作用からの場合だけに絞る．

タイプ１

タイプ１は，Shirakura and Tazawa[8] により，$m \geq 6$ で，次のように与えられる．

$$T = (\Omega(m,2)' : \Omega(m,m)')'$$

例 **15**）　$(\Omega(6,2)', \Omega(6,6)')'$　$< 16 \times 6 >$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

表６　検索確率（タイプ１）

ρ	m				
	6	7	8	9	6
	16×6	22×7	29×8	37×9	17×6
1.0	0.5382	0.6341	0.6672	0.6819	0.5821
1.2	0.7341	0.8251	0.8602	0.8738	0.7699
1.4	0.8699	0.9354	0.9545	0.9632	0.8917
1.6	0.9451	0.9799	0.9878	0.9916	0.9561
1.8	0.9796	0.9945	0.9969	0.9977	0.9852
2.0	0.9923	0.9987	0.9993	0.9995	0.9951
2.2	0.9975	0.9996	0.9998	0.9999	0.9985
2.4	0.9992	0.9999	0.9999	0.9999	0.9995

注）$m = 6 < 17 \times 6 >$ の列は，後述のタイプと N をそろえる為に，000111 の行を加えたものである．

タイプ１は，7.1.1 節と同様 ‘Simple Array’ で，次に示すように，Simple Array から構成される MEP.2 計画については，検索確率を求める際の確率 $P(\boldsymbol{\zeta_0})$ が２種類だけであることが示される．(証明は省略する)

定理９　検索可能計画 T が Simple Array である MEP.2 計画 とする．T に対して，確率 $P_1 = P(\,(\theta_{12},\, \theta_{34})')$ と $P_2 = P(\,(\theta_{12},\, \theta_{23})')$ とすると，検索確率は以下で与えられる．

$$P = \min(P_1,\ P_2)$$

タイプ２

タイプ２は，$T_1 = (\Omega(m,0)', \Omega(m,1)', \Omega(m,m-1)')'$ に，T_2 を付加して MEP.2 計画を構成したものである．(4.1 節を参照)

次の表７に示す例で T_2 の部分は，$m = 6$ のときが 4×6 の ST 配列，$m = 8$ のときが 6×8 の LC タイプ，$m = 9$ のときが 9×9 の QR タイプ，$m = 7,\ 11$ のときが $m \times m$ の BI タイプである．

表７　検索確率（タイプ２）

ρ	m			
	6	7	8	9
	$< 17 \times 6 >$	$< 22 \times 7 >$	$< 23 \times 8 >$	$< 28 \times 9 >$
1.0	0.6453	0.8016	0.6554	0.7513
1.2	0.8095	0.9337	0.8388	0.8850
1.4	0.9102	0.9816	0.9292	0.9476
1.6	0.9646	0.9952	0.9682	0.9737
1.8	0.9858	0.9989	0.9867	0.9880
2.0	0.9943	0.9996	0.9940	0.9939
2.2	0.9978	0.9998	0.9972	0.9968
2.4	0.9993	0.9999	0.9984	0.9985

タイプ３

タイプ３は，$T_1 = (\Omega(m,0)', \Omega(m,1)')'$ に，T_2 を付加して MEP.2 計画を構成したものである．(4.2 節を参照)

次の表８には，BIBD の転置だけで T_2 になる $m = 6(10 \times 6)$，$m = 8(14 \times 8)$，$m = 9(18 \times 9)$ の場合をあげている．（ $m = 9$ の場合は，N の小さい 12×9 の場合も参考にあげている ）

表８　検索確率（タイプ３）

ρ	m 6 $<17\times 6>$	8 $<23\times 8>$	9 $<28\times 9>$	9(参考) $<22\times 9>$
1.0	0.5744	0.5886	0.5160	0.4358
1.2	0.7656	0.8092	0.7343	0.6469
1.4	0.8911	0.9269	0.8809	0.8044
1.6	0.9584	0.9762	0.9563	0.9043
1.8	0.9853	0.9918	0.9859	0.9546
2.0	0.9952	0.9963	0.9954	0.9816
2.2	0.9984	0.9990	0.9988	0.9920
2.4	0.9996	0.9996	0.9994	0.9967

注）$m=7$ の場合は，BIBD(7,7,4,4,2) の 01 を反転した行列 (complement) を付加して MEP.2 Plan を構成したものしかできていない．少し異質な構成になるので，検索確率は省く．

結論

まず，どのタイプでも $\rho=2.0$ くらいで検索確率が 99 %以上になり，実用的には，いずれも良い計画と言える．

次に，タイプ１では，m が大きくなると N が大きくなるので，検索確率がより良くなる傾向がある．タイプ２では，m の増え方と検索確率には単純な傾向はない．タイプ３では，小さな ρ の値で検索確率が低いのが目立つ．

サイズが同じ計画で直接比べると，例えば，22×7 の場合，ρ の各値でタイプ２の方がタイプ１より良い．28×9 の場合は，ρ の各値で，タイプ２の方がタイプ３より良い．他の m の場合はサイズが違うので直接比較できないが，ρ が小さい可能性があるときは，タイプ２を使う方が良いと思われる．

８．終わりに

検索可能計画についての研究は，神戸大の白倉先生のもとで，まず，3.1 節の MEP.1 計画で，できるだけ処理組合せの数の小さな SD を構成することから始めた．それから，4.1 節の MEP.2 計画で，白倉先生と共に，T_2 の満たすべき条件から ST 配列という美しい関係を得た．その後，5 章の MEP.3 計画, 4.2 節の MEP.2(1;1) 計画, 3.2 節の MEP.1 計画の再検討，3.3 節の MEP.1 計画の構成と進んでいった．MEP.2 計画で構成された３つのタイプが，MEP.3 計画, MEP.2(1;1) 計画などの場合でも，大きな役割を果たしていることが伺えるが，それぞれに特有のタイプが他にも作れるかどうかは，まだ分かっていない．

検索確率については，MEP.2 計画の比較に最も力を入れて研究し，単一構成のタイプ１の場合より，T_1+T_2 という構成のタイプ２の方が検索確率がよいことが分かった．MEP.1 計画の場合も研究したが，処理組合せが少なくてすむ計画の構成に力を注いでいたので，例えば，２因子交互作用を検索する場合は，タイプ１のシンプルな計画の方が良い，という結果になった．検索可能計画の構成に検索確率を良くする，という観点も入れていくことが，これからの課題である．

参考文献

(1) J.N.Srivastava :“Designs for searching non-negligible effects” in: A Survey of Statistical Design and Linear Model (ed. J.N.Srivastava),pp.507-519, North-Holland, 1975.

(2) R.Mukerjee and K.hatterjee : “An application of Hadamard matrices for the construction of main effect plus two plans for 2^m factorials”, Utilitas Math. Vol.45, pp.213-218,1994.

(3) 末次武明：「MEP.1 plan の構成について」, 神戸高専研究紀要第 47 号, pp.123-127,2009.

(4) T.Shirakua:“Fractional factorial designs of two and three levels”. Discrete Mathematics Vol.116, pp. 99-135, North-Holland,1993.

(5) S.Ghosh:“On some new search designs for 2^m factorial experiments”, J.Statistical Planning and Inference Vol.5,pp.381-389,1981.

(6) T.Ohnishi and T.Shirakura:“Search designs for 2^m factorial experiments”, J.Statistical Planning and Inference Vol.11,pp.241-245,1985.

(7) T.Shirakura, T.Suetsugu and T.Tsuji:“Construction of main effect plus two plans for 2^m factorials”,J. Statistical Planning and Inference,Vol.105,pp.405-415,2002.

(8) T.Shirakua and S.Tazawa,S:“Series of main effect plus one or two plans for 2^m factorials when three-factor and higher order interactions are negligible” ,J.Japan Statist.Soc., Vol.21,pp.211-219,1991.