変位出力を用いた二次のプロパーなコントローラによる柔軟宇宙構造物の位置と姿勢制御

河野 佑 *，小林 洋二 **

Position and Attitude Control of Flexible Space Structures by a Second Order Proper Controller Using Displacement Output

Yu KAWANO*，Yohji KOBAYASHI**

ABSTRACT

This paper considers robust control synthesis for flexible space structures with collocated sensors and actuators. A second order proper controller is introduced at the input channel to control position and attitude of the structures. It is shown that the closed-loop system becomes robustly stable against uncertainty of characteristics in the structures by choosing the controller parameters appropriately.

Keywords: large space structures, second order controller, proper controller, displacement feedback

1. はじめに

宇宙太陽光発電衛星 [1] のような大型柔軟宇宙構造物の位置と姿勢を制御するための有効な手法の一つとして，センサとアクチュエータを同位置，同方向に配置するセンサ／アクチュエータ・コロケーションのもとで変位と速度の静的フィードバックを行う Direct Velocity and Displacement Feedback(DVDFB)[2] が提案されている．DVDFB は，特性パラメータに不確かさをもつ柔軟宇宙構造物の閉ループシステムをロバスト安定化し，ある二次形式評価関数に対して最適レギュレータを構成するなど優れた制御性能をもっている．しかしながら，DVDFB を実装するためには，変位センサに加えて速度センサが必要となり，このことはコストと信頼性の面から望ましくない．

この問題を解決するために文献 3) では，変位センサから得られる情報のみを用いて，一次のプロパーな伝達関数で表されるコントローラによって DVDFB の特性を近似的に実現し，構造物の特性パラメータの不確かさに対して閉ループシステムをロバスト安定化する方法が提案された．本稿ではこの方法を拡張し，二次のプロパーなコントローラを用いて柔軟宇宙構造物の閉ループシステムをロバスト安定化する方法を述べる．

2. 制御対象の記述

柔軟宇宙構造物の運動は，つぎの二階微分方程式で表される．

$$M\ddot{q}(t) + D\dot{q}(t) + Kq(t) = Lu(t) \tag{1}$$

ここで，$q(t) \in \Re^n$ は変位／角変位を表すベクトル，$u(t) \in \Re^r$ は力／トルクを表す操作入力ベクトル，M，D，$K \in \Re^{n\times n}$ はそれぞれ質量，減衰，剛性を表す対称行列で，M は正定行列，D，K は半正定行列である．D，K の半正定性は宇宙空間における剛体モードの存在によるものである．

(1) 式において行列 $L \in \Re^{n\times r}$ は，宇宙構造物への入力の伝わり方を示し，アクチュエータの配置によって決まる．ここでは，DVDFB の前提条件と同様にセンサ／アクチュエータ・コロケーションが実現されているものとする．このとき変位出力 $y(t) \in \Re^r$ は次式で表される．

$$y(t) = L^T q(t) \tag{2}$$

この係数行列 L^T は操作入力 $u(t)$ の係数行列 L と転置の関係になる．なお，(1)，(2) 式の宇宙構造物について剛体モードは可制御かつ可観測であると仮定し，次式が成り立つとする．

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} D & L \end{bmatrix} = n \tag{3}$$

3. 二次のプロパーなコントローラによる閉ループシステムのロバスト安定化

(1)，(2) 式の構造物への入力を次式の入出力関係で表されるコントローラによって与える．

$$u(s) = -\frac{\gamma(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}{(s+\beta_1)(s+\beta_2)}Ry(s) \tag{4}$$

ただし，α_1，α_2，β_1，β_2，γ はそれぞれ正のスカラ，$R \in \Re^{r\times r}$ は任意の正定対称行列である．

*　機械システム工学専攻 (2008 年度 修了)
**　機械工学科 教授

(1)，(2) 式の構造物と (4) 式のコントローラによって構成される閉ループシステムは次式で記述される．

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{5}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} z(t)^T & \dot{z}(t)^T & \ddot{z}(t)^T & \dddot{z}(t)^T \end{bmatrix}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_n \\ -M^{-1}\bar{A}_4 & -M^{-1}\bar{A}_3 & -M^{-1}\bar{A}_2 & -M^{-1}\bar{A}_1 \end{bmatrix}$$

ただし，$z(t) \in \Re^n$ はベクトルであり，行列 $\bar{A}_1$，$\bar{A}_2$，$\bar{A}_3$，$\bar{A}_4$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= D + (\beta_1 + \beta_2)M \\ \bar{A}_2 &= K + (\beta_1 + \beta_2)D + \beta_1\beta_2 M + \gamma LRL^T \\ \bar{A}_3 &= (\beta_1 + \beta_2)K + \beta_1\beta_2 D + \gamma(\alpha_1 + \alpha_2)LRL^T \\ \bar{A}_4 &= \beta_1\beta_2 K + \gamma\alpha_1\alpha_2 LRL^T \end{aligned}$$

なお，これらの行列中の $aD + bLRL^T$，$aK + bLRL^T$ (a, b は正のスカラ) なる形の行列は，(3) 式の仮定より正定対称になる．

(5) 式の閉ループシステムに対してつぎの定理が成り立つ．

定理 1　(4) 式のコントローラのパラメータが次式を満たすとき，(5) 式の閉ループシステムの原点は漸近安定である．

$$\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2 \geq 0 \tag{6}$$

$$\beta_1 + \beta_2 - \alpha_1 - \alpha_2 \geq 0 \tag{7}$$

$$\alpha_1\beta_1(\beta_2 - \alpha_2) + \alpha_2\beta_2(\beta_1 - \alpha_1) > 0 \tag{8}$$

(証明)　(5) 式の閉ループシステムに対する Lyapunov 方程式

$$PA + A^T P = -Q \tag{9}$$

において，行列 Q をつぎのように与える．

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} Q_{22} &= 2\beta_1^2\beta_2^2 D \\ &\quad + 2\gamma\{\alpha_1\beta_1(\beta_2 - \alpha_2) + \alpha_2\beta_2(\beta_1 - \alpha_1)\}LRL^T \\ Q_{33} &= 2(\beta_1^2 + \beta_2^2)D + 2\gamma(\beta_1 + \beta_2 - \alpha_1 - \alpha_2)LRL^T \\ Q_{44} &= 2D \end{aligned}$$

このとき，Lyapunov 方程式の解 P は次式になる．

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & 0 \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{13}^T & P_{23}^T & P_{33} & P_{34} \\ 0 & P_{24}^T & P_{34}^T & P_{44} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} P_{11} &= \beta_1\beta_2\bigl(\beta_1\beta_2 K + \gamma\alpha_1\alpha_2 LRL^T\bigr) \\ P_{12} &= (\beta_1 + \beta_2)\bigl(\beta_1\beta_2 K + \gamma\alpha_1\alpha_2 LRL^T\bigr) \\ P_{13} &= \beta_1\beta_2 K + \gamma\alpha_1\alpha_2 LRL^T \\ P_{22} &= 2\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)D + \beta_1^2\beta_2^2 M + (\beta_1 + \beta_2)^2 K \\ &\quad + \gamma\bigl\{(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)(\alpha_1 + \alpha_2)\bigr\}LRL^T \\ P_{23} &= 2\beta_1\beta_2 D + \beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)M + (\beta_1 + \beta_2)K \\ &\quad + \gamma(\alpha_1 + \alpha_2)LRL^T \\ P_{24} &= \beta_1\beta_2 M \\ P_{33} &= 2(\beta_1 + \beta_2)D + (\beta_1 + \beta_2)^2 M + K + \gamma LRL^T \\ P_{34} &= (\beta_1 + \beta_2)M, \ P_{44} = M \end{aligned}$$

(5) 式の閉ループシステムの原点が漸近安定であるための必要十分条件は，(10) 式の Q が半正定でかつ $(Q,\ A)$ が可観測対であるときに (11) 式の行列 P が半正定になることである [4)]．

まず，(3) 式と (8) 式より Q_{22} は正定，(3) 式と (7) 式より Q_{33} が正定もしくは半正定，$D \geq 0$ より Q_{44} は半正定となることから行列 Q は少なくとも半正定であることがわかる．つぎに，$(Q,\ A)$ が可観測対であることは，以下のように示せる．

$$\begin{aligned} &\operatorname{rank} \begin{bmatrix} sI_{4n} - A \\ Q \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{rank} \begin{bmatrix} sI_n & -I_n & 0 & 0 \\ 0 & sI_n & -I_n & 0 \\ 0 & 0 & sI_n & -I_n \\ M^{-1}\bar{A}_4 & M^{-1}\bar{A}_3 & M^{-1}\bar{A}_2 & sI_n + M^{-1}\bar{A}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{rank} \begin{bmatrix} sI_n & -I_n & 0 & 0 \\ 0 & sI_n & -I_n & 0 \\ 0 & 0 & sI_n & -I_n \\ \bar{A}_4 & \bar{A}_3 & \bar{A}_2 & sM + \bar{A}_1 \\ 0 & Q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{rank}\ \bar{A}_4 + \operatorname{rank}\ I_n + \operatorname{rank}\ I_n + \operatorname{rank}\ Q_{22} \\ &= \operatorname{rank}\Bigl(\beta_1\beta_2 K + \gamma\alpha_1\alpha_2 LRL^T\Bigr) + 2\operatorname{rank}\ I_n \\ &\quad + \operatorname{rank}\bigl(\beta_1^2\beta_2^2 D \\ &\qquad + \gamma\{\alpha_1\beta_1(\beta_2 - \alpha_2) + \alpha_2\beta_2(\beta_1 - \alpha_1)\}LRL^T\bigr) \\ &= 4n \end{aligned} \tag{12}$$

最後に行列 P が半正定となるための条件を導く．そのためにつぎの直交行列 T を用いて行列 P を相似変換する．

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_n \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$T^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & 0 \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{13}^T & P_{23}^T & P_{33} & P_{34} \\ 0 & P_{24}^T & P_{34}^T & P_{44} \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} P_{22} & P_{23} & P_{12}^T & P_{24} \\ P_{23}^T & P_{33} & P_{13}^T & P_{34} \\ P_{12} & P_{13} & P_{11} & 0 \\ P_{24}^T & P_{34}^T & 0 & P_{44} \end{bmatrix} \tag{14}$$

このとき，次の (15) ～ (17) 式が成り立てば P は半正定となる．

1) $P_{11} = \beta_1\beta_2 \left(\beta_1\beta_2 K + \gamma\alpha_1\alpha_2 LRL^T\right) > 0$ (15)

2) $P_{44} = M > 0$ (16)

3)
$$\begin{bmatrix} P_{22} & P_{23} \\ P_{23}^T & P_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{12}^T & P_{24} \\ P_{13}^T & P_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_{12} & P_{13} \\ P_{24}^T & P_{34}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{P}_{11} & \hat{P}_{12} \\ \hat{P}_{12}^T & \hat{P}_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_{11} &= 2\beta_1\beta_2\left(\beta_1+\beta_2\right)D + \gamma\left(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2\right)LRL^T \\ &\quad + \frac{\gamma(\beta_1+\beta_2)}{\beta_1\beta_2}\{\alpha_1\beta_1(\beta_2-\alpha_2)+\alpha_2\beta_2(\beta_1-\alpha_1)\}LRL^T \\ \hat{P}_{12} &= 2\beta_1\beta_2 D \\ &\quad + \frac{\gamma}{\beta_1\beta_2}\{\alpha_1\beta_1(\beta_2-\alpha_2)+\beta_2\alpha_2(\beta_1-\alpha_1)\}LRL^T \\ \hat{P}_{22} &= 2(\beta_1+\beta_2)D + \frac{\gamma}{\beta_1\beta_2}(\beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2)LRL^T \end{aligned}$$

1)，2) の条件は，(3) 式と $M > 0$ より成り立つ．3) の条件が成り立つことは以下のように示すことができる．(6)，(8) 式より

$$\begin{aligned} \hat{P}_{11} &= 2\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)D + \gamma(\beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2)LRL^T \\ &\quad + \frac{\gamma(\beta_1+\beta_2)}{\beta_1\beta_2}\{\alpha_1\beta_1(\beta_2-\alpha_2)+\alpha_2\beta_2(\beta_1-\alpha_1)\}LRL^T \\ &\geq 2\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)D \\ &\quad + \frac{\gamma(\beta_1+\beta_2)}{\beta_1\beta_2}\{\alpha_1\beta_1(\beta_2-\alpha_2)+\alpha_2\beta_2(\beta_1-\alpha_1)\}LRL^T \\ &> 0 \end{aligned} \tag{18}$$

が成り立つことと (7) 式の関係に注意すると

$$\begin{aligned} &\hat{P}_{22} - \hat{P}_{12}^T\hat{P}_{11}^{-1}\hat{P}_{12} \\ &\quad \geq 2(\beta_1+\beta_2)D + \frac{\gamma}{\beta_1\beta_2}(\beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2)LRL^T \\ &\quad - \frac{1}{\beta_1+\beta_2}\Big[2\beta_1\beta_2 D \\ &\qquad + \frac{\gamma}{\beta_1\beta_2}\{\alpha_1\beta_1(\beta_2-\alpha_2)+\alpha_2\beta_2(\beta_1-\alpha_1)\}LRL^T\Big] \\ &\quad = \frac{2(\beta_1^2+\beta_1\beta_2+\beta_2^2)}{\beta_1+\beta_2}D \\ &\qquad + \frac{\gamma}{\beta_1+\beta_2}(\beta_1+\beta_2-\alpha_1-\alpha_2)LRL^T \geq 0 \end{aligned} \tag{19}$$

となることから 3) の条件が成り立つ． **(証明終わり)**

定理 1 によれば，閉ループシステムの安定性は M，D，K などの宇宙構造物の特性パラメータの値には依存せず，(4) 式のコントローラのパラメータが (6) ～ (8) 式を満たせば保証される．つまり，(6) ～ (8) 式を満たすようにコントローラのパラメータを選んでおけば，構造物の特性パラメータに不確かさが存在しても，(5) 式の閉ループシステムをロバスト安定化できることを意味している．

定理 1 の条件を満たすコントローラのパラメータを決定する一つの方法としては，

$$0 < \alpha_i < \beta_i,\ i = 1, 2 \tag{20}$$

と選べばよい．このとき，(6) ～ (8) 式は必ず満たされる．この条件は，(4) 式のコントローラにおいてコントローラの入力と出力の信号間の位相が 0° より遅れないようにコントローラパラメータを選択することを意味している．

コントローラパラメータにおいて $\alpha_1 = \beta_1$ と選ぶと，(4) 式のコントローラの伝達関数は次式になる．

$$u(s) = -\frac{\gamma(s+\alpha_2)}{(s+\beta_2)}Ry(s) \tag{21}$$

このとき，(8) 式の条件は

$$\alpha_2 < \beta_2 \tag{22}$$

となり，これにより (6)，(7) 式も満たされる．この条件はコントローラが位相進み補償器となることを意味しており，文献 3) の一次のプロパーな近似 DVDFB における安定化条件と一致する．したがって，定理 **1** の安定化条件は，文献 3) の安定化条件を二次のプロパーなコントローラの場合へ拡張したものになっていることがわかる．

4. 数値シミュレーション

例として **Fig. 1** のように矩形の剛体 1 と 2 を，バネとダンパで近似される柔軟なリンク c_k $(k = 1, 2, 3)$ によって横方向に柔結合して構成される宇宙構造物[5] を考える．各剛体 i $(i = 1, 2)$ は，x_i 方向と y_i 方向の並進運動と質量中心 O_i 回りに θ_i 方向の回転運動を行うものとする．各剛体の質量を m_i，慣性モーメントを J_i で表し，剛体を結合するリンクのバネとダンパの定数を k_{ck}, d_{ck} $(k = 1, 2, 3)$ で表す．なお，センサとアクチュエータは，剛体 1 の質量中心に設置されるものとする.（なお，この構造物の数式モデルについては，文献 5) に記載されている.）

制御系設計に用いる宇宙構造物の数式モデルにおける剛体の質量と慣性モーメント，結合に用いる柔軟なリンクのバネとダンパの定数のノミナル値を **Case 1** のように与える．ノミナル

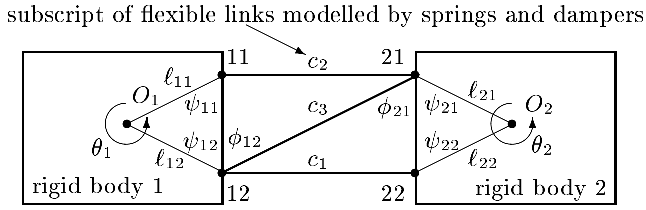

Fig. 1 A flexible space structure

な特性パラメータと実際の構造物の特性パラメータの間にはパラメータ誤差が存在する状況を想定し，実際の構造物の特性パラメータは **Case 2** のように与えられるものとする．

$$\textbf{Case 1} \quad m_i = 1.0,\ J_i = 0.5,\ k_{ck} = 1.0,\ d_{ck} = 0.016 \tag{23}$$

$$\textbf{Case 2} \quad \tilde{m}_i = 1.5,\ \tilde{J}_i = 1.1,\ \tilde{k}_{ck} = 0.8,\ \tilde{d}_{ck} = 0.08 \tag{24}$$

剛体 i の質量中心 O_i と結合点 ij までの距離 ℓ_{ij}，質量中心 O_i と結合点 ij を結ぶ線と剛体の辺がなす角度 ψ_{ij}，結合点 ij において剛体の辺と構造物のリンクがなす角度 ϕ_{ij}，伸縮量が 0 のときのリンク c_1, c_2 の長さ L の値はそれぞれ次式で与える．

$$\ell_{ij} = 1.0,\ \psi_{ij} = \pi/3.0,\ \phi_{ij} = \pi/3.0,\ L = 2.0$$

コントローラパラメータは，定理 **1** の条件を満たすように次式のように決定した．

$$\alpha_1 = 2.3 \times 10^{-2},\ \alpha_2 = 9.5 \times 10^{-1}$$
$$\beta_1 = 4.7 \times 10^{-2},\ \beta_2 = 1.9$$
$$\gamma = 10.0,\ R = I_3$$

このコントローラのボード線図を Fig. 2 に示す．

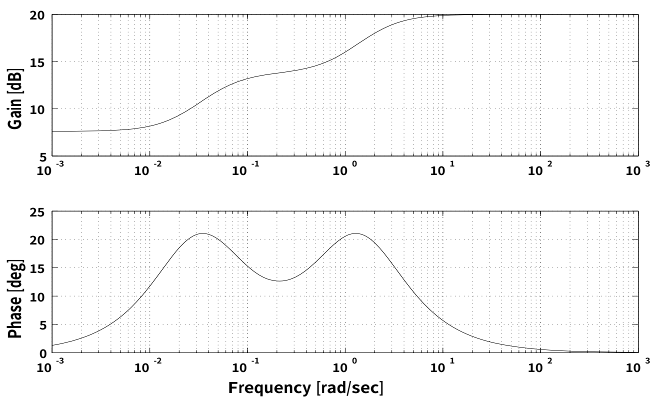

Fig. 2 Bode diagram of a proposed controller for the flexible space structure in Fig. 1

初期変位を (25)，(26) 式のように与えたとき，閉ループシステムにおける剛体 1, 2 の x_i, y_i 方向の変位と θ_i 方向の角変位の初期値応答はそれぞれ **Fig. 3** の実線，破線，一点鎖線となる．

$$x_1(0) = 1.0,\ y_1(0) = -1.0,\ \theta_1(0) = -0.5 \tag{25}$$

$$x_2(0) = y_2(0) = \theta_2(0) = 0 \tag{26}$$

この図より，提案法によって閉ループシステムは安定化されていることがわかる．

つぎに閉ループシステムのロバスト安定性を示すために，同じコントローラによって **Case 2** の特性パラメータをもつ構造物を制御した場合を考える．このとき，(25)，(26) 式の初期変位に対する剛体 1, 2 の x_i, y_i 方向の変位と θ_i 方向の角変位の初期値応答はそれぞれ **Fig. 4** の実線，破線，一点鎖線となる．この図より構造物の特性パラメータに誤差が存在した場合でも，提案法によって閉ループシステムは，ロバスト安定化されていることがわかる．

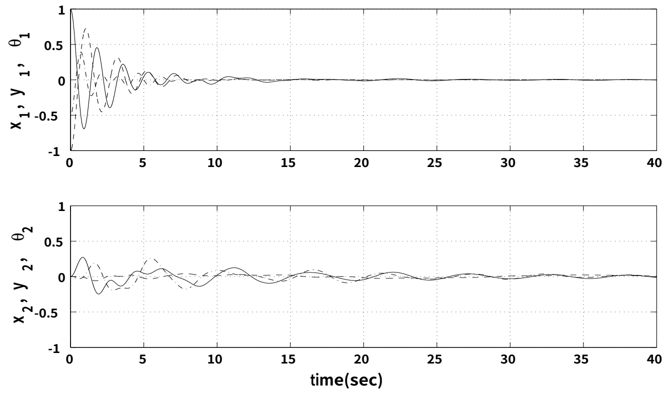

Fig. 3 Initial-state responses of x_i, y_i, and θ_i (Case 1)

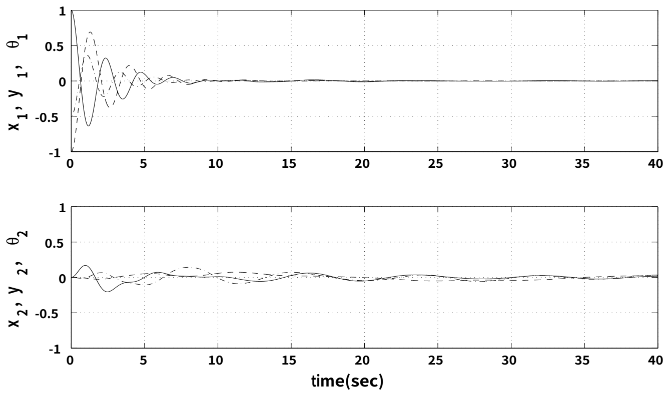

Fig. 4 Initial-state responses of x_i, y_i, and θ_i (Case 2)

5. おわりに

本稿では，センサとアクチュエータがコロケートされた柔軟宇宙構造物の位置と姿勢を制御する手法について述べた．変位センサから得られる情報のみを用いた二次のプロパーなコントローラを提案し，閉ループシステムをロバスト安定化するためにコントローラパラメータが満たすべき条件を導出した．最後に，提案法によって柔軟宇宙構造物をロバスト安定化できることを数値例で示した．

参考文献

1) Mankins J. C. : The Space Solar Power Option, *Aerospace America*, Vo.**35**, pp.30-36 (1997)

2) 糀谷，池田，木田：Collocated Feedback による宇宙構造物の最適制御, SICE 論文集, Vol.**25**-8, pp.54-60 (1989)

3) 河野，小林：変位出力を用いたプロパーなコントローラによる柔軟宇宙構造物のロバスト安定化, 第 51 回自動制御連合講演会, pp.1174-1175 (2008)

4) 井村：システム制御のための安定論，コロナ社，pp.75-78 (2000)

5) 小林，鹿田，姜，山中： プロパーな近似 DVDFB による柔軟宇宙構造物の周波数依存型評価関数に対する最適制御, 神戸高専研究紀要, No.48, pp.33-38 (2010)