

逐次最小二乗法を用いたフィードバック制御系の一設計法

小林 洋二*, 渡邊 勉**, 橋間 弘明***

A Design Method of Feedback Control Systems with the Recursive Least-Squares Method

Yohji KOBAYASHI*, Tsutomu WATANABE**, and Hiroaki HASHIMA***

ABSTRACT

In this paper, we propose a design method for feedback control systems using the recursive least-squares method. Control performances of the feedback control systems generally deteriorate if characteristic parameters of controlled objects are varied. After describing a compensation algorithm for these parameter variations of a velocity control system using DC motors, we show how to build an instrumentation and control equipment based on the proposed algorithm.

Keywords: parameters identification, recursive least-squares method, input output characteristics

1. はじめに

フィードバック制御系を設計する際には、安定性を保持し、望ましい入出力特性を実現するために制御対象の特性パラメータの不確かさに対する配慮が必要になる¹⁾。例えば、負荷変動によって特性パラメータが変化した場合には、その負荷変動によってフィードバック制御系の定常ゲインや固有角周波数が設計値とは異なってしまい、望ましい入出力特性が実現できなくなる。また、負荷変動によって位相の遅れが生じる周波数帯が変化した場合には、フィードバック制御系の安定性が損なわれる可能性もある。このような問題に対する方策の一つとして、負荷変動や経年変化によって生じた特性パラメータの変化をオンラインで検出し、その変化によって生じる入出力特性の変動分を補償することが考えられる。稼動しているシステムの特性パラメータの変化をオンラインで検出するためには、その入出力信号を用いて逐次的にパラメータ同定を行うことが必要になる。このような同定法にはいくつかの手法があり、よく用いられているものとして逐次最小二乗法²⁾が挙げられる。

一方、オンラインによるパラメータ同定や補償のための操作量の演算を行う制御装置を実装するためには、デジタルコンピュータを用いることになるが、このような制御システムを構築する場合、割り込みや丸め誤差の処理まで含んだソフトウェアとハードウェアの両面にわたる専門知識が要求される。この障壁を解決する手段として近年では、さまざまな制御演算のプ

ログラムをPC上でブロック線図を描く感覚で作成できるブロック記述型プログラミングツール（Mathworks社のSimulinkなど）が用意されている。さらにハードウェアを意識することなく、PC上でブロック記述型プログラミングツールを用いて作成されたプログラムをコンパイルしたあと、PCからダウンロードして実行することができる計測制御装置（例えばA & D社のAD5430, AD7011など）が商品化され、計測制御装置の開発や設計を容易にしている。

本稿では、直流モータで駆動される速度制御システムにおいて、負荷変動によって特性パラメータが変化する場合を想定する。このとき、逐次最小二乗法を用いて特性パラメータの同定を行い、劣化した入出力特性の補償を行うための操作量を計算し、望ましい入出力特性を維持する制御システムの構築方法を提案する。本稿の構成は以下の通りである。まず、第2章では制御対象の数式モデルについて述べ、問題の設定範囲を明らかにする。第3章において逐次最小二乗法について述べ、第4章で補償のための操作量の計算方法について述べる。第5章では、ブロック記述型プログラミングツール Simulink と計測制御装置 AD5430 を用いた計測制御装置の構成について説明し、最後に第6章で簡単な評価実験の方法とその結果について述べる。

2. 制御対象の記述

ここでは、直流モータで駆動される速度制御システムを考え、その入出力特性の数式モデル³⁾を導出する。モータの電機子間電圧を $e_m(t)$ 、電機子に流れる電流を $i(t)$ 、電機子のインダクタンス、抵抗、キャパシタンスをそれぞれ、 L , R , C とする

* 機械工学科 教授

** 機械工学科（平成21年度卒業）

*** 機械工学科（平成19年度卒業）

と、モータの電機子の電気回路において次式が成り立つ。

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = e_m(t) \quad (1)$$

モータのトルク定数を K_t で表すと電流 $i(t)$ とモータが発生するトルク $\mathcal{T}(t)$ の間につきの関係が成り立つ。

$$\mathcal{T}(t) = K_t i(t) \quad (2)$$

さらに、モータの逆起電力は電機子の角速度に比例するものと考え、電機子のキャパシタンス両端の間の電圧と逆起電圧定数をそれぞれ、 $v_a(t)$ 、 K_e として次式が成り立つ。

$$v_a(t) = K_e \omega(t) \quad (3)$$

最後に、モータの慣性モーメントを J_m 、その回転軸に接続される負荷の慣性モーメントを J_L 、粘性抵抗を D 、回転軸の角速度を $\omega(t)$ とすると、つぎの運動方程式が成り立つ。

$$(J_m + J_L) \frac{d\omega(t)}{dt} + D\omega(t) = \mathcal{T}(t) \quad (4)$$

モータの電氣的時定数 L/R は十分小さいと仮定し、 $L/R \simeq 0$ として (1) ~ (4) 式をラプラス変換して伝達関数 $G(s)$ を求めると次式になる。

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{E_m(s)} = \frac{K}{Ts + 1} \quad (5)$$

$$T = \frac{R(J_m + J_L)}{RD + K_e K_t}, \quad K = \frac{K_t}{RD + K_e K_t}$$

ただし、 $\Omega(s)$ 、 $E_m(s)$ はそれぞれ $\omega(t)$ 、 $e_m(t)$ をラプラス変換した変数を表す。

この式からわかるように、負荷の特性パラメータ J_L や D が変化すると、 $G(s)$ で表される入出力特性も変動してしまう。制御系設計時に意図した望ましい入出力特性を維持するためには、この入出力特性の変動分を補償することが必要になる。

3. 逐次最小二乗法によるパラメータ同定

ここでは、逐次最小二乗法²⁾を用いて入力信号 $u(t)$ と出力信号 $y(t)$ から (5) 式で表されるシステムの特性パラメータ T と K を求める方法について述べる。前章で述べた伝達関数を連続時間の線形系として状態方程式と出力方程式で表すと次式になる。

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $x(t) = \omega(t)$ 、 $u(t) = e_m(t)$ 、 $a = -1/T$ 、 $b = K/T$ である。この式の a 、 b を求めれば、 T 、 K を知ることができる。しかしながら、逐次最小二乗法ではデジタルコンピュータを用いて演算を行うため、(6) 式をサンプリング時間 ΔT ごとに変数の値が変わっていく離散時間の線形系で近似して、そのパラメータを同定することになる。離散時間で表される線形系の状態方程式と出力方程式は

$$\begin{cases} x(k+1) = a_D x(k) + b_D u(k) \\ y(k) = x(k) \end{cases} \quad (7)$$

となる。ここで、(6) 式の a 、 b と (7) 式の a_D 、 b_D はそれぞれ次式で関係づけられる⁴⁾。

$$a_D = e^{a\Delta T} \quad (8)$$

$$b_D = \int_0^{\Delta T} e^{a\tau} b d\tau \quad (9)$$

A/D 変換器を用いて離散時間の信号に変換された入力 $u(k)$ と出力 $y(k)$ を用いて a_D と b_D を同定するために、まず、未知パラメータのベクトル $\hat{\theta}(k)$ をつぎのように定義する。

$$\hat{\theta}(k) = [a_D(k) \quad b_D(k)]^T \quad (10)$$

ここで、 $a_D(k)$ 、 $b_D(k)$ は逐次最小二乗法によって求める未知パラメータである。逐次取り込まれる入力信号 $u(k-1)$ と出力信号 $y(k-1)$ を用いてベクトル $\varphi(k)$ を以下のように定義する。

$$\varphi(k) = [-y(k-1) \quad u(k-1)]^T \quad (11)$$

(10)、(11) 式のベクトルを用いて、以下の3つの式を (12)、(13)、(14) の順に繰り返して計算すると、 $a_D(k)$ と $b_D(k)$ はそれぞれ (7) 式の a_D と b_D へ収束する。

$$\epsilon(k) = y(k) - \varphi^T(k) \hat{\theta}(k-1) \quad (12)$$

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1) \varphi(k) \varphi^T(k) P(k-1)}{1 + \varphi^T(k) P(k-1) \varphi(k)} \quad (13)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{P(k-1) \varphi(k)}{1 + \varphi^T(k) P(k-1) \varphi(k)} \epsilon(k) \quad (14)$$

ただし、行列 $P(k)$ は共分散行列とよばれる行列であり、ここでは2行2列の行列になる。また、 $P(k)$ 、 $\hat{\theta}(k)$ の初期値 $P(0)$ 、 $\hat{\theta}(0)$ は以下のように与える。

$$\hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0, \quad P(0) = \nu I \quad (15)$$

ここで、 $\hat{\theta}_0$ は任意の実数、 ν は任意の正数である。

なお、連続時間線形系の係数 a と b は、(8)、(9) 式から同定した a_D と b_D を用いて次式により計算できる。

$$a = \frac{\log_e a_D}{\Delta T}, \quad b = \frac{b_D a}{e^{a\Delta T} - 1} \quad (16)$$

4. 入出力特性を補償する操作量の計算

ここでは、入出力特性を補償する操作量の計算方法について述べる。まず、(5) 式において負荷のノミナル値 J_L 、 D を用いたときの入出力特性は次式で表されているとする。

$$\Omega(s) = G(s) E_m(s) = \frac{K}{Ts + 1} E_m(s) \quad (17)$$

したがって、 T 、 K はそれぞれノミナル値の負荷を用いているときのシステムの時定数と定常ゲインである。

一方、(5) 式において負荷が J'_L 、 D' に変動したときの入出力特性を次式で表す。

$$\Omega'(s) = \frac{K'}{T's + 1} E_m(s) \quad (18)$$

ここで、 T' と K' は負荷が J'_L 、 D' に変動したシステムの時定数と定常ゲインであり、 $\Omega'(s)$ はこのシステムに $E_m(s)$ を入力

したときに得られる出力を表す. このシステムに入出力特性を補償する入力信号 $E_s(s)$ を加えて, (17) 式と (18) 式の入出力特性を等しくすることを考える. このとき次式が成り立つ.

$$\frac{K}{T_s + 1} E_m(s) = \frac{K'}{T's + 1} (E_m(s) + E_s(s)) \quad (19)$$

(19) 式を変形すると $E_s(s)$ は,

$$E_s(s) = \frac{\alpha s + \beta}{1 + T_s} E_m(s) \quad (20)$$

$$\alpha = (KT' - K'T)/K', \beta = (K - K')/K'$$

となる. 負荷が変動するシステムにおいてこの補償信号 $E_s(s)$ を計算するためには, あらかじめノミナル値を用いたときの特性パラメータ T, K を求めておき, 動作中のシステムに対して, 逐次最小二乗法を用いてパラメータ T' と K' をオンラインで同定計算し, それらの値と信号 $E_m(s)$ を用いて (20) 式から $E_s(s)$ を計算すればよいことになる.

5. 制御システムの構成

ここでは, 前章までで述べたアルゴリズムを用いて, 直流モータの角速度制御システムを構成する方法について述べる. この方法では, 制御システムを構築する場合に要求されるソフトウェアとハードウェアの専門知識を最小限に抑えるために, PC 上でブロック記述型プログラミングツール Simulink を用いてプログラムを作成し, これをコンパイルしたあと PC からダウンロードして実行することができる計測制御装置 AD5430 を用いている. 全体のシステム構成を Fig.1 に示す. この制御システムは, プログラム作成・ダウンロード用の PC, 計測制御装置 (AD5430), 発振器 (速度の指令信号発生器), アナログ信号の加算回路, DC モータ用アンプ (スピードコントローラ), DC モータ (マブチ FA-130), タコジェネレータから構成される.

このシステムにおける大まかな処理の流れは以下の通りである. まず, 制御演算処理のプログラムを PC 上で Simulink を用いて Fig.2 に示すような形で記述する. そのプログラムをコンパイルしたあと, PC から AD5430 へダウンロードする. このあと AD5430 は, PC から切り離してスタンドアロンでプログラムを実行する計測制御装置として使用できる. AD5430 には, A/D, D/A 変換ボードが搭載され, 電圧信号を外部から A/D 変換して取得でき, 演算結果は D/A 変換して電圧信号と

して外部の機器へ出力することができる. プログラムの作成から AD5430 が制御演算を開始するまでの手順を以下に示す.

1. Simulink を用いて Fig.2 のようにブロック記述形式のプログラムを作成する.
2. Real Time Workshop(RTW) とよばれるユーティリティを使用して各種の設定を行い, 実行モジュールへコンパイルする.
3. モデル定義ユーティリティ(MD) でプログラムの信号の定義付けや AD5430 用の設定を行う.
4. VC-Designer とよばれるユーティリティを用いて AD5430 用のコンソール表示画面を作成する.
5. これらの操作が完了すれば, 作成したプログラムを AD5430 に転送する.

これで作成したプログラムが AD5430 で実行可能となる. なお, プログラムを作成する際にブロック記述形式ではなく, C 言語を使用して作成する場合には, S-Function Builder ブロックを用いる. このブロックは Simulink ライブラリの User Defined Functions に収録されている. S-Function Builder ブロックの詳細な取扱いについては, 参考文献 5) に詳しく述べられている.

6. 性能評価実験

ここでは, 逐次最小二乗法による同定と補償信号を用いて直流モータの速度制御システムを構成したときの性能評価実験の手順と実験結果について述べる. Fig.1 において発振器から矩形波をモータ角速度指令値 $e_m(t)$ としてモータのスピードコントローラに入力する. スピードコントローラはこの信号を PWM 変調し, 電流信号へ変換して直流モータに加え, モータを回転させる. モータの角速度 $\omega(t)$ はタコジェネレータにより検出する. モータへの入力信号 $e_m(t)$ とモータの出力信号 $\omega(t)$ は AD5430 の A/D 変換器へ入力され, AD5430 はこれら 2つの信号を用いて, 逐次最小二乗法によってパラメータ同定と負荷変動を補償するための信号 $e_s(t)$ の計算を行う. 補償信号 $e_s(t)$ は D/A 変換器を通して出力され, アナログ信号の加算回路によってモータ角速度指令値 $e_m(t)$ と足し合わされる. 性能評価実験では, 以下の 3つの場合について角速度指令値 $e_m(t)$, 角速度 $\omega(t)$, 補償信号 $e_s(t)$ を計測した.

1. 直流モータの軸に負荷をつながない状態 (Case 1)
2. 負荷変動を与えるために慣性負荷をつないで, 補償信号を加えない場合 (Case 2)
3. 負荷変動を与えるために慣性負荷をつないで, 補償信号を加えた場合 (Case 3)

それぞれの Case の試行を 3 回ずつ行い再現性を確認した. なお, 逐次最小二乗法における初期値は, (15) 式において $\hat{\theta}(0) = 0, P(0) = 1000I$ とした.

Case 1 ~ Case 3 におけるステップ応答の波形をそれぞれ, Fig.3 ~ Fig.5 に示す. Fig.3 は基準になる応答であり, Fig.4 では, モータの回転軸に慣性負荷を取り付けることによって, 角

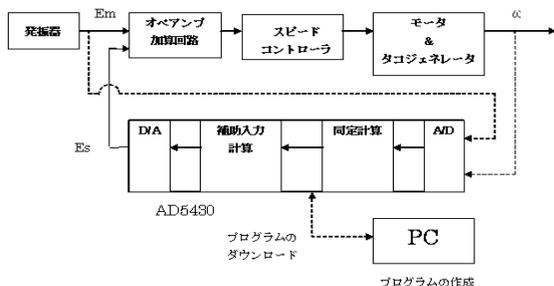


Fig. 1 全体のシステム構成

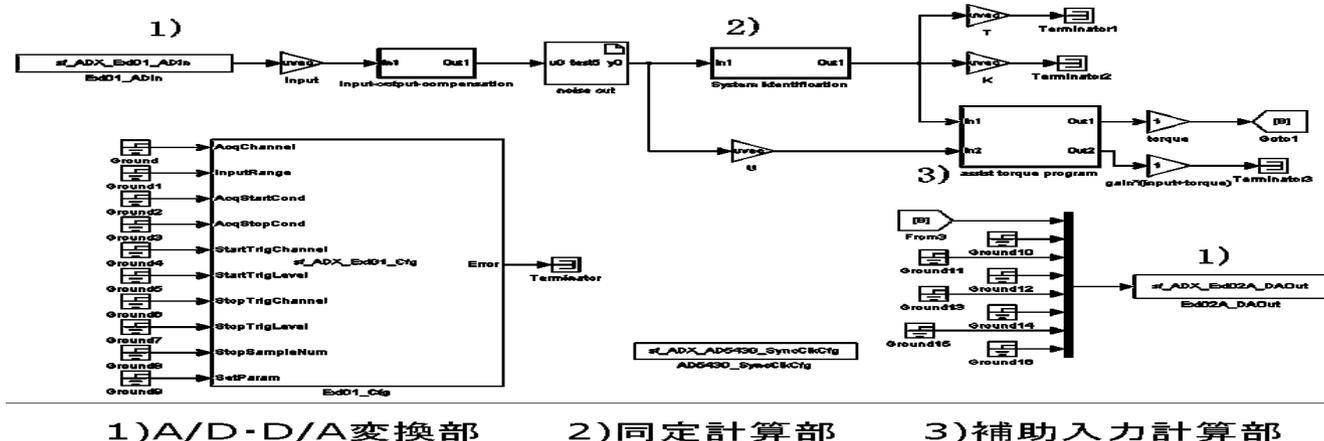


Fig. 2 Simulink のプログラム例

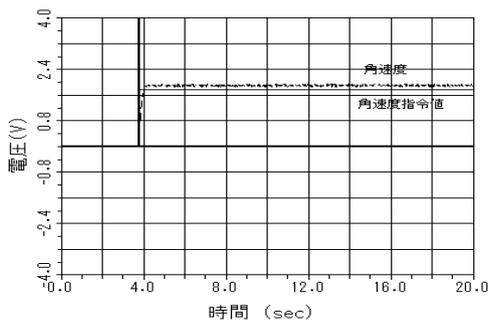


Fig. 3 Case 1 (負荷無し状態) のステップ応答

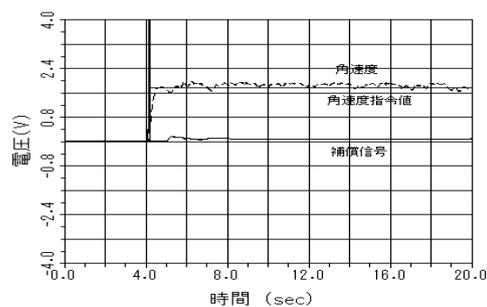


Fig. 5 Case 3 (負荷有り・補償有り状態) のステップ応答

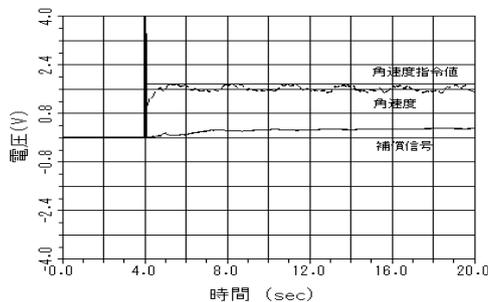


Fig. 4 Case 2 (負荷有り・補償無し状態) のステップ応答

速度の定常値が下がり、振動が生じていることがわかる。(なお、Fig.4 では補償信号の計算値を D/A 変換して表示しているが、スピードコントローラには入力していない。) Case 2 のシステムに本稿で提案した逐次最小二乗法によるパラメータ同定を用いた補償を行うと、Fig.5 に示す応答になる。この図から出力信号に振動は残るものの、定常値は Case 1 のそれに近づいていることがわかる。本稿では、制御対象を (5) 式の一次遅れ系としてパラメータ同定を行っているため、 T 、 K の変動に対しては補償を行うことができるが、二次以上の高次遅れ要素が存在した場合、その補償を行うことはできない。このことが Case 3 において振動が残った理由と考えられる。

7. おわりに

本稿では、逐次最小二乗法を用いた直流モータの速度制御システムの構成法について述べた。まず、直流モータの速度制御システムを一次遅れ系としてモデル化し、変動するパラメータを明らかにした。つぎに逐次最小二乗法を用いて、入出力特性を基準となるシステムへ近づけるための補償信号の計算方法を述べた。そして、これらの演算をブロック記述型プログラム Simulink と計測制御装置 AD5430 で実現し、簡単な性能評価実験を行った。その結果、負荷が増加した場合においても、定常ゲインを基準となる入出力特性へ近づけることができた。

参考文献

- (1) John C. Doyle, et al.: *Feedback Control Theory*, Dover Publication Inc., pp.45-59, 1992
- (2) 足立修一: *MATLAB による制御のためのシステム同定*, 東京電機大学出版局, pp.115-119, 1996
- (3) 喜多村, 他: *JSME テキストシリーズ 制御工学*, 日本機械学会, pp.18 - 20, 2002
- (4) 上滝, 他: *電気学会大学講座 自動制御理論*, 電気学会, pp.156-159, 1971
- (5) CYBERNET 編: *S-Function Builder ブロックチュートリアル*, CYBERNET, 2007